Übungen - Blatt 10

→ 28.11.2011

Aufgabe 1

Sei

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r, "\psi_1"] & N_2 \arrow[r, "\psi_2"] & N_3 \arrow[r, "\psi_3"] & N_4 \arrow[r, "\psi_4"] & N_5 \end{tikzcd}$$

ein Diagramm von A-Modulhomomorphismen, wo jede Sequenz exakt ist. Nach Fünflemma weisst man, dass f_3 ein Isomorphismus ist, wenn die folgenden Behauptungen erfüllt sind.
(1) f_1 surjektiv, (2) f_2 injektiv, (3) f_2 surjektiv, (4) f_4 injektiv, (5) f_4 surjektiv, (6) f_5 injektiv.
Wir möchten beweisen, dass jede Behauptung wichtig ist.
Für (6), nehmen wir

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"] & 0 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "f_3"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_4"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[d, "f_5"] \\ 0 \arrow[r, "\psi_1"] & 0 \arrow[r, "\psi_2"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\psi_3"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\psi_4"] & 0 \end{tikzcd}$$

wo $\varphi_3(x) = f_3(x) = 2x$, $f_4(x) = \psi_3(x)$ und $\varphi_4(x) = [x]$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$. Bemerken Sie, dass f_3 kein Isomorphismus ist, und dass (1), (2), (3) (4) und (5) erfüllt sind.
Machen Sie gleich für (1), (2), (3), (4), (5).

Aufgabe 2

Sei A ein Ring, $A \neq \{0\}$, und $m, n \in \mathbb{N}$.
Beweisen Sie, dass $A^m \cong A^n \Rightarrow m = n$.
Tipp: Mit Aufgabe 2 von Blatt 9, beweisen Sie, dass $(A/\mathfrak{m})^m \cong A^m/\mathfrak{m}A^m \cong A^n/\mathfrak{m}A^n \cong (A/\mathfrak{m})^n$ *für jedes Maximalideal* $\mathfrak{m} \subset A$.

Aufgabe 3

Sei $A = A_1 \times A_2$, wo A_1, A_2 zwei Ringen sind, die nicht null sind.
Beweisen Sie, dass $M_1 = A_1 \times \{0\} \subset A$ und $M_2 = \{0\} \times A_2 \subset A$ sind zwei projektive A-Moduln, die nicht frei sind.

Aufgabe 4

Sei $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$, und sei $N = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot i = 0\}$.

1. Beweisen Sie, dass N ein freier Untermodul von M ist, und finden Sie ein Basis von N.
2. Zu welchem $\mathbb{Z}$-Modul ist M/N isomorph?