Übungen - Blatt 1

→ 26.09.2011

Aufgabe 1

Sei A ein (kommutativer) Ring und seien $a,b,c \in A$.

1. Zeigen Sie, dass $a+b = a+c \Rightarrow b = c$.
2. Ist $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$ immer richtig? Für welche a ist dies immer wahr?
3. Zeigen Sie dass $a \cdot 0 = 0$ (0 ist ein absorbierendes Element für die Multiplikation).
4. Ist es möglich ein anderes absorbierendes Element für die Multiplikation zu haben?

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für jeden (kommutativen) Ring A ist $(A^*, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.
2. Sei A ein Ring. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
   (a) A ist der Nullring;
   (b) $0 = 1$ in A;
   (c) A enthält nur ein Element.

Aufgabe 3

Seien A, B zwei Ringe und sei $\varphi \colon A \to B$ eine Abbildung, so dass

$$\begin{array}{rcll} \varphi(a+b) & = & \varphi(a) + \varphi(b) & \text{für alle } a,b \in A. \\ \varphi(a \cdot b) & = & \varphi(a) \cdot \varphi(b) & \text{für alle } a,b \in A. \end{array}$$

Ist $\varphi(0) = 0$ immer richtig? Und $\varphi(1) = 1$?

Aufgabe 4

Sei A ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ zwei Ideale. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Ideale von A sind.

1. $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$;
2. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$;
3. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \{\sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}, b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{b}, n \in \mathbb{N}\}$.
4. $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in \mathfrak{a}\}$ (heisst Wurzel oder Radikal von $\mathfrak{a}$).

Vergleichen Sie $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$. Welche enthalten sich einander? Sind sie gleich? Gleiche Frage für $\mathfrak{a}$ und $\sqrt{\mathfrak{a}}$.

Aufgabe 5

Sei A ein Ring.
Man sagt, dass ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ prim ist wenn $\mathfrak{a} \neq A$ und wenn

$$\forall a, b \in A, ab \in \mathfrak{a} \Rightarrow a \in \mathfrak{a} \text{ oder } b \in \mathfrak{a}.$$

Man sagt, dass ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ maximal ist wenn $\mathfrak{a} \neq A$ und wenn

$$\text{es kein Ideal } \mathfrak{b} \subset A \text{ gibt, so dass } \mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq A.$$

Zeigen Sie (ohne $A/\mathfrak{a}$ benützen), dass jedes Maximalideal prim ist.

Aufgabe 6

Für jede der nachfolgenden Ringe A, finden Sie alle Ideale, alle Primidealen, und alle Maximalideale:

1. $A = \mathbb{Z}$,
2. $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. $A = \mathbb{R}$.
4. A ist ein Körper.
5. $A = \mathbb{C}[X]$ (komplexe Polynome in ein Variabeln).

Aufgabe 7

Sei A ein Ring. Man definiert Spec A als die Menge aller Primideale von A und für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ definiert man $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ für jede Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$.
2. $V(A) = \emptyset$, $V((0)) = \operatorname{Spec} A$.
3. $V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$ für alle Familien $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ von Idealen in A.

Die Menge Spec A ist also ein topologischer Raum, wenn man die $V(\mathfrak{a})$ als die abgeschlossenen Mengen von Spec A definiert (Zariski-Topologie).