Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Andrea Fanelli

KOMMUTATIVE ALGEBRA
Frühlingssemester 2016

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 9

→ 02.05.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Folge von A-Moduln. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ist projektiv;
2. M_i ist projektiv $\forall i$.

*Glauben Sie, dass es auch richtig ist mit $\prod_{i\in I} M_i$ statt $\bigoplus_{i\in I} M_i$?

Aufgabe 2

Ist der A-Modul M injektiv?

1. $A = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
2. $A = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}$.
3. $A = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
4. $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
5. $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
6. $A = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
7. $A = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

Sei A ein Integritätsring. Beweisen Sie, dass sein Quotientenkörper $Q(A)$ ein injektiver A-Modul ist.

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist, der nicht torsionsfrei ist.

Aufgabe 5

Sei $\mathbb{Z}[X]$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$, und sei

$$\mathbb{Q}(X) = \left\{ \frac{P}{Q} \,\middle|\, P, Q \in \mathbb{Z}[X], Q \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{P}{Q} \,\middle|\, P, Q \in \mathbb{Q}[X], Q \neq 0 \right\}$$

sein Quotientenkörper. Beweisen Sie, dass $M = \mathbb{Q}(X)/\mathbb{Z}[X]$ ein teilbarer $\mathbb{Z}[X]$-Modul ist, der nicht injektiv ist.
Tipp: Sei $\mathfrak{a} = (2, X) \subset \mathbb{Z}[X]$ das Ideal erzeugt von 2 und X (das kein Hauptideal ist). Beweisen Sie, dass ein $\mathbb{Z}[X]$-Modulhomomorphismus $\mathfrak{a} \to M$ existiert, der 2 auf 0 schickt, und X auf $\frac{1}{2}$, und dass es keine Einschränkung von ein $\mathbb{Z}[X]$-Modulhomomorphismus $\mathbb{Z}[X] \to M$ ist.

Aufgabe 6

Sei A ein Ring und

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von A-Moduln.
Sind die folgenden Behauptungen richtig?

1. M endlich $\Rightarrow M_2$ endlich.
2. M endlich $\Rightarrow M_1$ endlich.
3. M_1 endlich $\Rightarrow M$ endlich.
4. M_2 endlich $\Rightarrow M$ endlich.
5. M_1, M_2 endlich $\Rightarrow M$ endlich.

Was passiert, wenn die Folge zerfällt?