Übungen - Blatt 8

→ 25.04.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & M_3 & \xrightarrow{\varphi_2} & M_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{\psi_1} & N_2 & \xrightarrow{\psi_2} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Modulhomomorphismen, wo beide Zeilen exakte Folgen sind.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen (mit dem Schlangenlemma):

1. f_1, f_3 injektiv $\Rightarrow$ f_2 ist injektiv.
2. f_1, f_3 surjektiv $\Rightarrow$ f_2 ist surjektiv.
3. f_1, f_3 bijektiv $\Rightarrow$ f_2 ist bijektiv.
4. f_1, f_2 bijektiv $\Rightarrow$ f_3 ist bijektiv.
5. f_2, f_3 bijektiv $\Rightarrow$ f_1 ist bijektiv.

Aufgabe 2 (Fünflemma)

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & M_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & M_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & M_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & M_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ N_1 & \xrightarrow{\psi_1} & N_2 & \xrightarrow{\psi_2} & N_3 & \xrightarrow{\psi_3} & N_4 & \xrightarrow{\psi_4} & N_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Modulhomomorphismen, wo beide Zeilen exakte Folgen sind.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. f_1 surjektiv, f_2, f_4 injektiv $\Rightarrow$ f_3 ist injektiv.
2. f_5 injektiv, f_2, f_4 surjektiv $\Rightarrow$ f_3 ist surjektiv. *Tipp: Beweisen Sie die Existenz eines kommutativen Diagrammes der Form*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathrm{Coker}(\varphi_1) & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\varphi_4) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_2'} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4|_{\mathrm{Ker}(\varphi_4)}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\psi_1) & \longrightarrow & N_3 & \xrightarrow{\psi_3} & \mathrm{Ker}(\psi_4), & & \end{array}$$

   und benützen Sie das Schlangenlemma.

3. f_1 surjektiv, f_5 injektiv, f_2, f_4 bijektiv $\Rightarrow$ f_3 ist bijektiv.

Aufgabe 3

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & M_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & M_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & M_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & M_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ N_1 & \xrightarrow{\psi_1} & N_2 & \xrightarrow{\psi_2} & N_3 & \xrightarrow{\psi_3} & N_4 & \xrightarrow{\psi_4} & N_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Modulhomomorphismen, wo beide Zeilen exakte Folgen sind. Nach dem Fünflemma weiss man, dass f_3 ein Isomorphismus ist, wenn die folgenden Behauptungen erfüllt sind:
(1) f_1 surjektiv, (2) f_2 injektiv, (3) f_2 surjektiv, (4) f_4 injektiv, (5) f_4 surjektiv, (6) f_5 injektiv.
Beweisen Sie, dass jede Behauptung notwendig ist.
Für (6), nehmen wir

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{\varphi_1} & 0 & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_3} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_4} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ 0 & \xrightarrow{\psi_1} & 0 & \xrightarrow{\psi_2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi_3} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi_4} & 0 \end{array}$$

wo $\varphi_3(x) = f_3(x) = 2x$, $f_4(x) = \psi_3(x)$ und $\varphi_4(x) = [x]$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$. Bemerken Sie, dass f_3 kein Isomorphismus ist, und dass (1), (2), (3) (4) und (5) erfüllt sind.
Machen Sie gleich für (1), (2), (3), (4), (5).

Aufgabe 4

Sei $A = A_1 \times A_2$, wo A_1, A_2 zwei Ringe sind, die nicht null sind.
Beweisen Sie, dass $M_1 = A_1 \times \{0\} \subset A$ und $M_2 = \{0\} \times A_2 \subset A$ zwei projektive A-Moduln sind, die nicht frei sind.

Aufgabe 5

Ist der A-Modul M projektiv?

1. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
2. $A = \mathbb{Z}$, $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$

3*. $A = \mathbb{Z}$, $M = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$

4. $A = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
5. $A = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6

Sei A ein Ring, M ein endlicher A-Modul und $\varphi\colon M \to A^n$ ein surjektiver A-Modulhomomorphismus. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ein endlicher A-Modul ist.