Übungen - Blatt 7

→ 18.04.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein Ring, $A \neq \{0\}$, und $m, n \in \mathbb{N}$.
Beweisen Sie, dass $A^m \cong A^n \Rightarrow m = n$.
Tipp: Mit Aufgabe 3 von Blatt 5, beweisen Sie, dass $(A/\mathfrak{m})^m \cong A^m/\mathfrak{m}A^m \cong A^n/\mathfrak{m}A^n \cong (A/\mathfrak{m})^n$ *für jedes Maximalideal* $\mathfrak{m} \subset A$.

Aufgabe 2

Sind die folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln untereinander isomorph?

1. $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z}(0,-1,1) + \mathbb{Z}(2,1,1))$
4. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Aufgabe 3

Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $M = M_1 \oplus M_2$, wo M_1, M_2 zwei A-Moduln sind.
Beweisen Sie, dass $M/\mathfrak{a}M \cong M_1/\mathfrak{a}M_1 \oplus M_2/\mathfrak{a}M_2$.

Aufgabe 4

(1) Finden Sie einen Ring A und eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

von A-Moduln, so dass

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, M') \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}(N, M) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}(N, M'') \longrightarrow 0$$

keine exakte Sequenz ist.
(2) Finden Sie einen Ring A und eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

von A-Moduln, so dass

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(M', N) \longrightarrow 0$$

keine exakte Sequenz ist.

Aufgabe 5

Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und M ein endlicher A-Modul, so dass $\mathfrak{a}M = M$. Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Es gibt $a \in A$, so dass $am = m$ für jedes $m \in M$.
Tipp: Benützen Sie Folgerung 4.4 der Vorlesung.

Aufgabe 6

Sei A ein Ring und M ein endlicher A-Modul. Man möchte sehen, dass jeder surjektive A-Modulhomomorphismus $f\colon M \to M$ auch injektiv ist.
Beweisen Sie, die folgenden Behauptungen:

1. M ist ein $A[X]$-Modul ist, mit $(\sum a_i X^i) \cdot m = \sum a_i f^i(m)$ und $f^i(m) = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{i \text{ mal}})(m)$.
2. M ist ein endlicher $A[X]$-Modul ist.
3. $\mathfrak{a} \cdot M = M$, wo $\mathfrak{a} = (X) \subset A[X]$.
4. Es gibt $u \in A[X]$, so dass $m = (u \cdot X) \cdot m$ für jedes $m \in M$ (Benützen Sie Aufgabe 5).
5. Wenn $m \in M$ ist, so dass $f(m) = 0$, hat man $m = (u \cdot X) \cdot m = 0$. Es folgt, dass f injektiv ist.