Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Andrea Fanelli

KOMMUTATIVE ALGEBRA
Frühlingssemester 2016

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 6

→ 11.04.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein Hauptidealring, $p \in A$ ein Primelement. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für jeden A-Modul M und jedes $k \geq 1$ ist $(p^k)M/(p^{k+1})M$ ein A-Modul, aber auch ein $A/(p)$-Modul, d.h. ein $A/(p)$-Vektorraum.

2. Sei $d \in A \setminus \{0\}$ und $M = A/(d)$.

   Wir erinnern, dass der *Exponent* $\nu_p(d) \in \mathbb{N}$ *von p bezüglich d*, definiert ist als die Zahl so dass
   $$d = p^{\nu_p(a)} b$$
   mit $b \in A$, $p \nmid b$ ist (vgl. Algebra Vorlesung).

   (a) Für jedes $k \geq 1$ hat man
   $$(p^k)M = (p^k, d)/(d) = (\mathrm{ggT}(p^k, d))/(d) = (p^{\min(\nu_p(d),k)})/(d).$$

   (b) Der A-Modul $(p^k)M/(p^{k+1})M$ ist isomorph zu
   $$(p^k)M/(p^{k+1})M \simeq (p^{\min(\nu_p(d),k)})/(p^{\min(\nu_p(d),k+1)}) \simeq \begin{cases} \{0\} & \text{wenn} \quad \nu_p(d) \leq k, \\ A/(p) & \text{wenn} \quad \nu_p(d) > k. \end{cases}$$
   Tipp: Für den ersten Isomorphismus, benützen Sie (a) und den Satz 2.4(2) der Vorlesung.

Aufgabe 2

Sei A ein Hauptidealring, $m, m', r, s \geq 0$ und $d_1, \ldots, d_r, d'_1, \ldots, d'_s \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$, so dass $d_1 | d_2 | \ldots | d_r$ und $d'_1 | d'_2 | \ldots | d'_s$. Beweisen Sie, dass die zwei folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. Die A-Moduln $M = A^m \times \prod_{i=1}^r A/(d_i A)$ und $M' = A^{m'} \times \prod_{i=1}^r A/(d_i A)$ sind isomorph.

2. $m = m'$, $r = r'$ und $(d_i) = (d'_i)$ für $i = 1, \ldots, r$.

Tipp: $2 \Rightarrow 1$ ist trivial. $1 \Rightarrow 2$ auch, wenn A ein Körper ist. Für $1 \Rightarrow 2$ und A kein Körper, benützen Sie, dass $M/(p^k)M$ isomorph zu $M'/(p^k)M'$ für jedes Primelement $p \in A$ und jedes $k \geq 0$ (folgt aus Aufgabe 3, Blatt 5). Nehmen Sie dann k gross genug und finden Sie, dass $m = m'$ (mit Aufgabe 1). Dann nehmen Sie alle Primelelemente p und alle k, und beweisen Sie, dass $\nu_p(d_i) = \nu_p(d'_i)$ für jedes p und jedes i (nochmals mit Aufgabe 1).

Aufgabe 3

Sei A ein Hauptidealring und $Q(A)$ sein Quotientkörper. Beweisen Sie, dass $Q(A)$ ein unendlicher A-Modul ist, wenn $A \neq Q(A)$.

Tipp: Nehmen Sie $B = A_{\mathfrak{p}}$, wo $\mathfrak{p} = (p) = pA$, für $p \in A$ ein Primelement, und beweisen Sie, dass $Q(A)$ ein unendlicher B-Modul ist.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so dass $\mathfrak{a}M = M$.

1. Finden Sie ein Beispiel, wo $\mathfrak{a}M \neq \{am \mid a \in \mathfrak{a}, m \in M\}$.

   Tipp: Es ist möglich wie in Aufgabe 1 vom Blatt 4 zu argumentieren. Nehmen Sie z.B. $A = \mathbb{C}[x,y]$, $\mathfrak{a} = (x) + (y)$, $M = S_x^{-1}A \times S_y^{-1}A$, wo $S_x = \{x^i \mid i \geq 0\}$, $S_y = \{y^i \mid i \geq 0\}$, .

2. Finden Sie ein Beispiel, wo $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Jac}(A)$ und $M \neq \{0\}$. (M muss unendlich sein, nach dem Lemma von Nakayama).

   Tipp: Es ist möglich, Aufgabe 3 zu benützen.

3. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Nil}(A)$, $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt $\Rightarrow M = 0$.

4. * Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Nil}(A) \not\Rightarrow M = 0$.

Aufgabe 5

Gibt es $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen φ, ψ, so dass die folgenden Sequenzen exakt sind? (Das bedeutet: so dass φ injektiv ist, ψ surjektiv ist, und $\operatorname{Bild}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi)$)

1. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

2. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

3. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

4. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow 0$$

5. $$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

6. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$