Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Andrea Fanelli

KOMMUTATIVE ALGEBRA
Frühlingssemester 2016

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 5

→ 04.04.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein Ring. Für alle $x \in A, a, b \in A^*$ definiert man

$$E(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(A), \ [a,b] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A).$$

Beweisen Sie, die folgenden Behauptungen:

1. $E(x) \cdot [a,b] = [b,a] \cdot E(b^{-1}ax)$ für alle $x \in A, a, b \in A^*$.
2. $E(x) \cdot E(0) \cdot E(y) = [-1,-1] \cdot E(x+y)$ für alle $x, y \in A$.
3. $E(x) \cdot E(a) \cdot E(y) = E(x - a^{-1}) \cdot [a, a^{-1}] \cdot E(y - a^{-1})$ für alle $x, y \in A, a \in A^*$.
4. Jede Elementarmatrix $M \in \mathrm{GL}_2(A)$ ist ein Produkt von $E(\lambda_i)$ und $[a_i, b_i], \lambda_i \in A, a_i, b_i \in A^*$.
5. Sei $M \in \mathrm{GL}_2(A)$ ein Produkt von Elementarmatrizen. Man kan M schreiben, als

$$M = [a,b] \cdot E(\lambda_1) \cdot \dots \cdot E(\lambda_n)$$

   wo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A, a, b \in A^*$. (*Tipp: Benützen Sie* 4 *und* 1.)
   Man kann auch wählen, dass $\lambda_i \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$, für $1 < i < n$. (*T: Benützen Sie* 2 *und* 3.)

Aufgabe 2

Sei $A \subset \mathbb{C}$ ein Unterring. Wir benützen die Notation von Aufgabe 1 für $E(a), [a,b] \in \mathrm{GL}_2(A)$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A$ sind so dass $|\lambda_i| \geq 2$ für $i = 2, \dots, n$, folgt dass

$$[\pm 1, \pm 1] \cdot E(\lambda_1) \cdots E(\lambda_n) \in \mathscr{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A) \middle| |a_3| > |a_4| \right\}.$$

   Tipp: Benützen Sie Induktion über n, berechnen Sie $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot E(\lambda_n)$ *und beweisen Sie, dass* $|\lambda_n a_3 - a_4| \geq |\lambda_n| \cdot |a_3| - |a_4| \geq |a_3| + (|a_3| - |a_4|)$.

2. Wir nehmen an, dass $A^* = \{\pm 1\}$ und $A \setminus \{0, \pm 1\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq 2\}$. Wenn eine Matrix $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A)$ existiert, mit $|a_3| = |a_4|$, $|a_3 - a_4| > |a_4|$, $|a_3 + a_4| > |a_4|$, ist M kein Produkt von Elementarmatrizen.
   Tipp: Beweisen Sie, dass $M \notin \mathscr{M}$ *und dass* $M \cdot (E(\lambda))^{-1} \notin \mathscr{M}$, *für* $\lambda \in \{0, \pm 1\}$.
   Das Resultat folgt dann aus Aufgabe 1(5) *und Augabe* 2(1).

3. Für $\theta = \frac{1+\sqrt{-19}}{2}$, $A = \mathbb{Z}[\theta]$ und $M = \begin{pmatrix} 3-\theta & 2+\theta \\ -3-2\theta & 5-2\theta \end{pmatrix}$, beweisen Sie dass M kein Produkt von Elementarmatrizen ist.
   Dies gibt ein neuer Beweis, zur nicht Euklidischkeit von A.

Aufgabe 3

Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Errinerung: Für jeder A-Modul M definiert man $\mathfrak{a}M = \{\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M\}$ (A-Untermodul von M, vgl Aufgabe 1 von Blatt 4).
Sei $\psi\colon M \to N$ ein A-Modulhomomorphismus, wo M, N zwei A-Moduln sind.

1. Bemerken Sie, dass $M/\mathfrak{a}M$ ein A-Modul ist, aber auch ein $A/\mathfrak{a}$-Modul ist.

   Tipp: Benützen Sie Lemma 1.2.

2. Beweisen Sie, dass ψ ein eindeutiger $A/\mathfrak{a}$-Modulhomomorphismus induziert

$$\begin{array}{rccc} \hat{\psi}\colon & M/\mathfrak{a}M & \to & N/\mathfrak{a}N \\ & [m] & \mapsto & [\psi(m)] \end{array}$$

   Tipp: Man kann es direkt beweisen, oder Satz 1.7 *benützen.*

3. Beweisen Sie die folgenden Implikationen:

   ψ surjektiv $\Rightarrow$ $\hat{\psi}$ surjektiv.

   ψ bijektiv $\Rightarrow$ $\hat{\psi}$ bijektiv
   (*Tipp: benützen Sie die Abbildung $\varphi\colon N \to M$ so dass $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_N$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_M$, und beweisen Sie, dass $\hat{\psi} \circ \hat{\varphi} = \mathrm{id}_{N/\mathfrak{a}N}$ und $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi} = \mathrm{id}_{M/\mathfrak{a}M}$*).

4. Beweisen Sie, dass

   ψ injektiv $\not\Rightarrow$ $\hat{\psi}$ injektiv. *Tipp: $A = \mathbb{Z}$, $M = N = \mathbb{Z}$ und $\mathfrak{a} = (2)$ sollte funktionnieren.*

Aufgabe 4

Sei A ein Ring, $A \neq \{0\}$ und $n \geq 1$. Man möchte sehen, dass jede Basis von A^n genau n Elementen enthält. Wenn A ein Körper, war es in Lineare Algebra bewiesen.
Sei B eine Basis von A^n. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Es gibt ein A-Modulisomorphismus $\varphi\colon A^{(B)} \to A^n$.
   Tipp: Benützen Sie ein Satz der Vorlesung.

2. Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ gibt ein A-Modulisomorphismus $(A/\mathfrak{a})^{(B)} \to (A/\mathfrak{a})^n$.
   Tipp: Beweisen Sie dass $A^n/(\mathfrak{a}A^n) \simeq (A/\mathfrak{a})^n$, $A^{(B)}/(\mathfrak{a}A^{(B)}) \simeq (A/\mathfrak{a})^{(B)}$ und benützen Sie Aufgabe 3(3).

3. Wenn A kein Körper ist, gibt es ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$ (Bewiesen in der Algebra Vorlesung). Weil $(A/\mathfrak{m})^{(B)}$ und $(A/\mathfrak{m})^n$ isomorph als $A/\mathfrak{m}$-Modul sind, folgt dass B genau n Elementen enthält.

Aufgabe 5

Finden Sie eine Basis von den folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln:

1. $M_1 = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \in 2\mathbb{Z}\}$
2. $M_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 3a + 5b + 2c \in 3\mathbb{Z}\}$
3. $M_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 3a + 5b + 2c \in 3\mathbb{Z}, a \in 6\mathbb{Z}\}$