# Übungen - Blatt 4

*→ 29.03.2016, 12:00*

## Aufgabe 1

Sei $A$ ein Ring, $M$ ein $A$-Modul und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Wir definieren $\mathfrak{a}M = \{\sum_{i=1}^n a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M\}$.

1. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a}M$ ein $A$-Untermodul von $M$ ist.
2. Wenn $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal ist (d.h. $\mathfrak{a} = (x)$ für ein Element $x \in A$), beweisen Sie, dass
$$\mathfrak{a}M = \{am \mid a \in \mathfrak{a}, m \in M\}.$$
3. Wenn $m_1, \dots, m_k$ ein Erzeugendensystem von $M$ ist, beweisen Sie, dass
$$\mathfrak{a}M = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i m_i \;\middle|\; a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{a} \right\}.$$
4. Finden Sie ein Beispiel, wo $\mathfrak{a}M \neq \{am \mid a \in \mathfrak{a}, m \in M\}$.

   *Tipp: Nehmen Sie z.B. $A = \mathbb{C}[x,y]$, $\mathfrak{a} = (x) + (y)$, $M = A \times A$ und beweisen Sie, dass $(x,y) \in \mathfrak{a}M \setminus \{am \mid a \in \mathfrak{a}, m \in M\}$.*

## Aufgabe 2

Wir nehmen $A = \mathbb{Z}$. Finden Sie die Smith-Normalformen von den folgenden Matrizen

1. $\begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & i \\ i & 2+i & i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{Z}[i]) = \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$
3. $\begin{pmatrix} X^2-1 & X^5-1 \\ X^3-1 & X^4-1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}[X])$

## Aufgabe 3

1. Sind die folgenden Matrizen äquivalent über $\mathbb{Z}$ ? (d.h. gibt es $S, T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ so dass $SM_iT = M_j$ ?)
$$M_1 = \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$
2. Sind die oberen Matrizen äquivalent über $\mathbb{R}$ ? (d.h. gibt es $S, T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ so dass $SM_iT = M_j$ ?)

## Aufgabe 4

Sei $A$ ein euklidischer Ring. Beweisen Sie, dass jedes Element von $\mathrm{GL}_2(A)$ gleich

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot T$$

ist, wo $a, b \in A^*$ und $T$ ein Produkt von Elementarenmatrizen von Typ 1 ist: Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, mit $\lambda \in A$.

*Tipp: Nehmen sie $M \in \mathrm{GL}_2(A)$, multiplizieren sie mit Elementarenmatrizen von Typ 1 und betrachten Sie die erste Zeile. Mit endlich viele Schritte von Division mit Rest sollten Sie eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ haben, mit $a, b, c \in A$.*

## Aufgabe 5

Sei $A$ ein euklidischer Ring.

1. Sei $a \in A^*$ und $a^{-1} \in A^*$ sein Inverses (das Element, so dass $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$). Berechnen Sie
$$\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

2. Beweisen Sie, dass jedes Element von $\mathrm{SL}_2(A)$ ein Produkt von Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, mit $\lambda \in A$ ist.

   *Tipp: Benützen Aufgabe 4 und Aufgabe 5.1*

3. Beweisen Sie, dass jedes Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein Produkt von Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   ist.

   *Tipp: Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ für $n \geq 1$.*

## Aufgabe 6

Sei $\theta = \frac{1+\sqrt{-19}}{2} \in \mathbb{C}$ und sei $A = \mathbb{Z}[\theta]$.

1. Beweisen Sie, dass $M = \begin{pmatrix} 3-\theta & 2+\theta \\ -3-2\theta & 5-2\theta \end{pmatrix}$ in $\mathrm{SL}_2(A)$ ist.

2*. Ist $M$ gleich wie ein Produkt von Elementarmatrizen?