Übungen - Blatt 3

→ 14.03.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $M_1, M_2 \subset M$. Berechnen Sie $M_1 + M_2$ und $M_1 \cap M_2$.

1. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $M_1 = \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$, $M_2 = 3\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$.
2. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $M_1 = \{(a,b) \in M \mid 2a = b\}$, $M_2 = \{(a,b) \in M \mid 5a = 7b\}$.
3. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, $M_1 = \{(a,b) \in M \mid 2a = b\}$, $M_2 = \{(2a, \frac{b}{5^i 7^j}) \in M \mid a, b \in \mathbb{Z}, i, j \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Seien N, P zwei Untermoduln von M.

1. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ann}(P+N) = \mathrm{Ann}(P) \cap \mathrm{Ann}(N)$.
2. Beweisen Sie, dass $(N : P) = \{a \in A \mid aP \subset N\}$ ein Ideal von A ist, so dass $(N : P) = \mathrm{Ann}((N+P)/N)$.

Aufgabe 3

Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\varphi \colon M \to M$ ein A-Modulhomomorphismus.
Zeigen Sie, dass M ein $A[X]$-Modul ist, wobei die Struktur wie folgt definiert ist:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \cdot m = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i(m),$$

für $m \in M$ und $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ (jedes a_i liegt in A),
wobei $\varphi^i = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{i \text{ mal}}$ und φ^0 die Identität ist.

Aufgabe 4

Sei A ein Hauptidealring und sei M ein endlicher A-Modul, so dass $\mathrm{Ann}(m) = \{0\}$ für jedes $m \in M \backslash \{0\}$ (man sagt, dass M torsionsfrei ist).
Zeigen Sie, dass M frei ist.

Tipp: Zeigen Sie, dass M einen maximalen freien Untermodul $L \subset M$ enthält. Beweisen Sie dann, dass $aM \subset L$ für ein $a \in A \backslash \{0\}$.

Aufgabe 5

1. Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so dass $\mathfrak{a} \neq 0$. Beweisen Sie, dass $A/\mathfrak{a}$ kein freier A-Modul ist.

2. Finden Sie einen Ring A und einen endlichen A-Modul M, der einen unendlichen A-Untermodul N enthält.

   Tipp: A muss kein Hauptidealring sein. Es ist möglich $M = A$ zu wählen.

Aufgabe 6

Sei A ein Ring.

1. Für beliebige A-Moduln M und N_i ($i \in I$), beweisen Sie, dass $\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(M, N_i)$ isomorph zu einem Untermodul von $\mathrm{Hom}(M, \bigoplus_{i\in I} N_i)$ ist.

2. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Hom}(M, \bigoplus_{i\in I} N_i)$ und $\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(M, N_i)$ nicht immer isomorph sind.

3. Was können wir sagen, wenn M ein endlicher A-Modul ist?