Jérémy Blanc Mattias Hemmig Andrea Fanelli	KOMMUTATIVE ALGEBRA Frühlingssemester 2016	Universität Basel Mathematik

Übungen - Blatt 2

→ 07.03.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein Ring.

1. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}_A(A/\mathfrak{a})$, für jedes Ideal $\mathfrak{a}$.
2. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Ist es möglich, dass $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_A(A/\mathfrak{a})$? Ist es möglich, dass $\mathfrak{a} \subsetneq \mathrm{Ann}_A(A/\mathfrak{a})$?
3. Beweisen Sie, dass $A/\mathfrak{b}$ ein $A/\mathfrak{a}$-Modul ist, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Idealen von A sind, mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.

   Tipp: Benutzen Sie 1.
4. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-Modul ist, und berechnen Sie $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring und $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass A^n ein freies A-Modul ist, mit Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$, wo $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_n = (0,\ldots,0,1)$.

Aufgabe 3

Ist M ein freies A-Modul (für die kanonische Operationen)?

1. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. $A = \mathbb{Z}$, $M = (2) = 2\mathbb{Z}$.
3. $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C}$.
5. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4

Sei $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $M_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $M_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Berechnen Sie $\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$ und $\mathrm{Hom}_A(M_2, M_1)$. (Finden Sie, wie viele Elementen es gibt, und ob diese A-Modul isomorph zu "einfachste" A-Modul sind).
Tipp: Das Bild von $[1]$ *hat nur endlich viele Möglichkeiten* ($\textit{höchstens}$ 4)*, und das Bild von den anderen Elementen ist dann eindeutig bestimmt.*

Aufgabe 5

Sei A ein Ring, I eine Indexmenge und M_i ein A-Modul, für jedes $i \in A$.
Wir definieren $\prod_{i \in I} M_i$ als die Menge von Abbildungen $f: I \to \bigcup M_i$, so dass $f(i) \in M_i$ für jedes i, und schreiben eine Abbildung f wie eine Folge: $f = (f(i))_{i \in I}$.

1. Beweisen Sie, dass $\prod_{i \in I} M_i$ ein A-Modul ist, durch
$$(m_i)_{i \in I} + (n_i)_{i \in I} = (m_i + n_i)_{i \in I} \text{ und } a \cdot ((m_i)_{i \in I}) = ((a \cdot m_i)_{i \in I})$$
wo $a \in A$, $m_i, n_i \in M_i$.

2. Beweisen Sie, dass
$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \left\{ (m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid \text{nur endlich viele } m_i \text{ nich null sind} \right\}$$
ein A-Untermodul von $\prod_{i \in I} M_i$ ist.

3. Bemerken Sie, dass $\bigoplus_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i$ wenn I endlich ist, und dass $\bigoplus_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, wenn $I = \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 6

Sei M ein A-Modul und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Man definiert
$$\sum_{i \in I} M_i = \left\{ \sum_{i \in I} m_i \mid m_i \in M_i, \text{ mit } m_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\}.$$

1. Beweisen Sie, dass $\sum_{i \in I} M_i$ ein A-Untermodul von M ist.

2. Beweisen Sie, dass $\sum_{i \in I} M_i$ das kleinste A-Untermodul von M, das alle M_i enthält.

3. Beweisen Sie, dass $\bigcap_{i \in I} M_i$ ein A-Untermodul von M ist.

4. Beweisen Sie, dass $\bigcap_{i \in I} M_i$ dass grösste A-Untermodul von M ist, das in alle M_i enthalten ist.