Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Andrea Fanelli

KOMMUTATIVE ALGEBRA
Frühlingssemester 2016

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 12

→ 23.05.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei K ein Körper. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für jedes $(a_1,\dots,a_n) \in K^n$ ist der Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} \psi_{(a_1,\dots,a_n)}\colon & K[X_1,\dots,X_n] & \to & K \\ & P(X_1,\dots,X_n) & \mapsto & P(a_1,\dots,a_n) \end{array}$$

   surjektiv und erfüllt $(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n) \subset \mathrm{Ker}(\psi_{(a_1,\dots,a_n)})$.

2. $(X_1,\dots,X_n) = \mathrm{Ker}(\psi_{(0,\dots,0)})$.
   Tipp: Für „$\supset$“ schreiben Sie ein Polynom P als

$$P = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} \nu_{(i_1,\dots,i_n)} (X_1)^{i_1}(X_2)^{i_2}\cdots(X_n)^{i_n},$$

   mit $\nu_{(i_1,\dots,i_n)} \in K$ für jedes $(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n$ und beweisen Sie, dass

$$P \in \mathrm{Ker}(\psi_{(0,\dots,0)}) \Leftrightarrow \nu_{(0,\dots,0)} = 0.$$

3. Für jedes $(a_1,\dots,a_n) \in K^n$ gilt

$$(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n) = \mathrm{Ker}(\psi_{(a_1,\dots,a_n)}).$$

   Tipp: Bemerken Sie, dass $P(X_1,\dots,X_n) \in \mathrm{Ker}(\psi_{(a_1,\dots,a_n)}) \Leftrightarrow P(X_1+a_1,\dots,X_n+a_n) \in \mathrm{Ker}(\psi_{(0,\dots,0)})$.

4. Für jedes $(a_1,\dots,a_n) \in K^n$ ist $(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n) \subset K[X_1,\dots,X_n]$ ein Maximalideal.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass $((X_1)^2+1, X_2,\dots,X_n)$ ein Maximalideal von $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ ist.
Tipp: Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]/((X_1)^2+1,X_2,\dots,X_n)$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper.

1. Beweisen Sie, dass der Transcendenzgrad von $K \subset K[X_1,X_2]$ genau 2 ist.

2. Sei $f \in K[X_1,X_2]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $\deg f \geq 1$ und sei L der Quotientskörper von $K[X_1,X_2]/(f)$. Beweisen Sie, dass der Transcendenzgrad von $K \subset L$ genau 1 ist.

   Tipp: Beweisen Sie, dass die Klasse von X_1 oder X_2 in L eine Transcendenzbasis gibt.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Ring der Polynome in n Variabeln mit Koeffizienten aus K. Für jede Teilmenge $S \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ definiert man

$$V(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \; \forall f \in S\}.$$

Beweisen Sie dass

$$V(\{f_1, \ldots, f_m\}) \cup V(\{g_1, \ldots, g_l\}) = V(\{f_i g_j\}_{i=1, j=1}^{m,l}).$$

für alle $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_l \in K[X_1, \ldots, X_n]$.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Ring der Polynome in n Variabeln mit Koeffizienten aus K. Für jede Teilmenge $M \subset \mathbf{k}^n$ definiert man

$$I(M) = \{f \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid f|_M = 0\} = \{f \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid f(p) = 0 \; \forall p \in M\}$$

Beweisen Sie die folgende Behauptungen:

1. $S \subset I(V(S))$ für jede Teilmenge $S \subset K[X_1, \ldots, X_n]$.
2. $M \subset V(I(M))$ für jede Teilmenge $M \subset K^n$.
3. $V(S) = V(I(V(S)))$ für jede Teilmenge $S \subset K[X_1, \ldots, X_n]$.
4. $I(M) = I(V(I(M)))$ für jede Teilmenge $M \subset K^n$.
5. $I(K^n) = \{0\} \Leftrightarrow K$ ist unendlich.

   Tipp: Für $\Leftarrow$ beweisen Sie dass Resultat mit Induktion über n.