Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Andrea Fanelli

KOMMUTATIVE ALGEBRA
Frühlingssemester 2016

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 11

→ 16.05.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, n kein Multipel von ein Quadrat. Wir möchten beweisen, dass der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n}\}$ gleich $\mathbb{Z}[\alpha]$ ist, wo

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{wenn} \quad n \equiv 2,3 \pmod 4, \\ \frac{1+\sqrt{n}}{2} & \text{wenn} \quad n \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Beweisen Sie, die folgenden Behauptungen:

1. α ist ganz über $\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \tilde{\mathbb{Z}}$, wo $\tilde{\mathbb{Z}}$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ ist.
3. Die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \mathbb{Q}[\sqrt{n}] & \to & \mathbb{Q}[\sqrt{n}] \\ & a + b\sqrt{n} & \mapsto & a - b\sqrt{n} \end{array}$$
ist ein Ringisomorphismus, der auf $\mathbb{Z}$ die Identität ist.
4. $\psi(\tilde{\mathbb{Z}}) = \tilde{\mathbb{Z}}$. (Benützen Sie 3).
5. $x \cdot \psi(x) \in \tilde{\mathbb{Z}}$ und $x + \psi(x) \in \tilde{\mathbb{Z}}$ für jedes $x \in \tilde{\mathbb{Z}}$.
6. $\tilde{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. (Benützen Sie Aufgabe 4 von Blatt 10).
7. $x \cdot \psi(x) \in \mathbb{Z}$ und $x + \psi(x) \in \mathbb{Z}$ für jedes $x \in \tilde{\mathbb{Z}}$ (folgt aus 5 und 6).
8. Wenn $a + b\sqrt{d} \in \tilde{\mathbb{Z}}$ hat man $2a, a^2 - b^2 n \in \mathbb{Z}$ (folgt aus 7). Das impliziert, dass $4b^2 n = (2b)^2 \cdot n \in \mathbb{Z}$ und dann $2b \in \mathbb{Z}$.
9. $\tilde{\mathbb{Z}} = \{q + r\sqrt{\alpha} \mid q, r \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 2

Sei $A = K[X,Y]/(Y^2 - X^2(X-1))$, wo K ein Körper ist. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. A ein Integritätsring (d.h. $Y^2 - X^2(X-1)$ ist irreduzibel in $K[X,Y]$).

   Tipp: Schreiben Sie $K[X,Y] = K[X][Y]$, beweisen Sie dass $Y^2 - X^2(X-1)$ ein primitives Polynom von $K[X][Y]$ ist, und benützen Sie der Grad bezüglich Y.
2. Sei $Q(A)$ der Quotientskörper von A und $\tilde{A} \subset Q(A)$ der ganze Abschluss von A in $Q(A)$. Beweisen Sie, dass $t = \frac{y}{x} \in \tilde{A}$, wo $x, y \in A$ die Klassen von X und Y sind.
3. Die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & K[X] & \mapsto & Q(A) \\ & P(X) & \mapsto & P(t) \end{array}$$
ist ein injektiver Ringhomomorphismus, so dass $A \subset \mathrm{Bild}(\psi)$.
4. $\tilde{A} = \mathrm{Bild}(\psi)$.

Aufgabe 3

Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung, und $a_1, \ldots, a_n$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $a_1, \ldots, a_n$ sind algebraisch unabhängig über K;
2. Für $i = 1, \ldots, n$ ist a_i nicht algebraisch über $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$.

Tipp: Benützen Sie Induktion über n.

Aufgabe 4

Sind $a_1, \ldots, a_n \in L$ algebraisch abhängig über K? (wo $K \subset L$ die folgenden Körpererweiterungen sind).

1. $K = \mathbb{Q} \subset L = \mathbb{C}$, $a_1 = \pi$, $a_2 = \sqrt{3} + 4$.
2. $K = \mathbb{C} \subset L = \mathbb{C}(X_1, X_2)$, $a_1 = X_1$, $a_2 = X_2 + 1$.
3. $K = \mathbb{R} \subset L = \mathbb{C}$, $a_1 \in \mathbb{C}$ (beliebig).

Aufgabe 5

Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Eine *Transzendenzbasis* der Körpererweiterung $K \subset L$ ist eine Teilmenge $S \subset L$, die algebraisch unabhängig über K ist, und die maximal für diese Eigenschaft ist.

1. Seien $a_1, \ldots, a_d \in L$. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) $\{a_1, \ldots, a_d\}$ ist eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung $K \subset L$
   (b) $a_1, \ldots, a_d$ sind algebraisch unabhängig über K und L ist ganz über $K(a_1, \ldots, a_d)$.
2. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) L ist eine ganze K-Algebra.
   (b) Die leere Menge ist eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung $K \subset L$.
   (c) Alle Transzendenzbasen der Körpererweiterung $K \subset L$ sind leer.

Aufgabe 6

Finden Sie eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung $K \subset L$:

1. $K = \mathbb{C}$, $L = \mathbb{C}(X, Y)$ (der Quotientskörper des Polynomrings $\mathbb{C}[X, Y]$).
2. $K = \mathbb{C}$, L ist der Quotientskörper von $K[X, Y]/(X^2 - Y^3)$.
3. $K = \mathbb{C}$, L ist der Quotientskörper von $K[X, Y]/(Y^2 - X^2(X + 1))$.
4. $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$.

5***. $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{R}$.