Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Andrea Fanelli

KOMMUTATIVE ALGEBRA
Frühlingssemester 2016

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 10

→ 09.05.2016, 12:00

Aufgabe 1

Ist der Ring A noethersch?

1. $A = \mathbb{Z}$;
2. $A = \mathbb{R}$;
3. $A = \mathbb{Z}[\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}]$;
4. $A = \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, \ldots]$;
5. $A = \{\text{Stetige Funktionen } [0,1] \to \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 2

Sei A ein noetherscher Ring. Ist jeder Unterring $B \subset A$ noethersch?

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Ring der Polynome in n Variabeln mit Koeffizienten aus K. Für jede Teilmenge $S \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ definiert man

$$V(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \forall f \in S\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $S \subset S' \Rightarrow V(S') \subset V(S)$, für alle Teilmengen $S, S' \subset K[X_1, \ldots, X_n]$.
2. Für jede Teilmenge $S \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt
$$V(S) = V(\mathfrak{a}),$$
wo $\mathfrak{a} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ das Ideal erzeugt von S ist.
3. Für jede Teilmenge $S \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ gibt es $f_1, \ldots, f_m$, so dass
$$V(S) = V(\{f_1, \ldots, f_m\}).$$

Aufgabe 4

Sei A ein Ring.

1. Der Ring $A[X]$ ist eine endlich erzeugte A-Algebra, die nicht endlich ist.
2. Wenn A faktoriell ist und $K = Q(A)$ der Quotientenkörper von A ist, so ist kein Element von $K \setminus A$ ganz über A.

   Tipp: Nehmen Sie $P = X^d + a_d X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in A[X]$ ein unitäres Polynom und beweisen Sie, dass jede Nullstelle von P, die in K liegt, auch in A liegt. Dafür können Sie eine Nullstelle als $\frac{p}{q}$ schreiben, wo $p, q \in A$, $q \neq 0$ und wobei kein irreduzibles Element p und q teilt.

Aufgabe 5

Für jedes $i \geq 1$ definiert man $\sqrt[i]{2} \in \mathbb{R}$ als die einzige positive reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$, so dass $r^i = 2$.

1. Beweisen Sie, dass
$$A = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sqrt[i]{2} \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} \right\}$$
   ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist.
2. Beweisen Sie, dass A eine $\mathbb{Q}$-Algebra ist, die ganz aber nicht endlich ist.

Aufgabe 5

Ist $b \in B$ ganz über $A \subset B$?

1. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $b = \sqrt{2}$.
2. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $b = \frac{1}{2}$.
3. $A = K[X]$, $B = K[X,Y]$, $b = Y$.
4. $A = K[f]$, $f \in K[X] \setminus K$, $B = K[X]$, $b \in K[X]$.