Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Andrea Fanelli

KOMMUTATIVE ALGEBRA
Frühlingssemester 2016

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 1

→ 29.02.2016, 12:00

Aufgabe 1

Sei M eine abelsche Gruppe.

1. Beweisen Sie, dass M die Struktur von einem $\mathbb{Z}$-Modul hat, mit

$$\begin{aligned} 0m &= 0 \\ am &= \underbrace{m+\cdots+m}_{a \text{ mal}} && \forall a \geq 1 \\ am &= \underbrace{(-m)+\cdots+(-m)}_{-a \text{ mal}} && \forall a \leq -1 \end{aligned}$$

   für jedes $m \in M$.

2. Beweisen Sie, dass M genau eine $\mathbb{Z}$-Modul Struktur hat (die wie oben definiert ist).

Aufgabe 2

Sei A ein (kommutativer) Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a}$ ein A-Modul ist, mit der Multiplikation von A.

Aufgabe 3

Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

1. Beweisen Sie, dass B ein A-Modul ist, durch $ab = \varphi(a)b$ für $a \in A, b \in B$.

2. Beweisen Sie, dass jeder B-Modul M auch ein A-Modul ist, via $am = \varphi(a)m$ für $a \in A$, $m \in M$.

Aufgabe 4

Sei M ein A-Modul. Ein A-Untermodul $N \subset M$ ist eine Teilmenge von M, so dass

1. $0 \in N$,

2. $n + n' \in N, -n \in N, \forall n, n' \in N$,

3. $an \in N, \forall a \in A, \forall n \in N$.

Sei M ein A-Modul und $N \subset M$ ein A-Untermodul. Beweisen Sie, dass die Operation von A auf N eine A-Modul Struktur definiert.

Aufgabe 5

Sei M ein A-Modul und $N \subset M$ ein A-Untermodul. Wir definieren den Faktormodul M/N als die Menge der Äquivalenzklassen von M, wo $m \sim m'$ genau dann wenn $m - m' \in N$. Die Äquivalenzklasse von $m \in M$ schreibt man $[m]$.
Beweisen Sie, dass die Menge M/N ein A-Modul ist, mit:

1. $[m] + [m'] = [m + m'], \forall m, m' \in M$.
2. $a[m] = [am], \forall m \in M, \forall a \in A$.

Aufgabe 6

Sei M ein A-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul. Beweisen Sie, dass die kanonische Abbildung $\pi \colon M \to M/N$, die m auf $[m]$ schickt, eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{c} \text{Untermoduln von } M, \\ \text{die } N \text{ enthalten} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Untermoduln} \\ \text{von } M/N \end{array} \right\} \\
E & \mapsto & \pi(E) \\
\pi^{-1}(F) & \leftarrow & F
\end{array}$$

induziert.