GRUPPENKOHOMOLOGIE - FS 2013

1. Nicht-kommutative Kohomologie

1.1. Gruppen.

Definition. Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer innere binäre Verknüpfung $\cdot$

$$\begin{array}{rcl} \cdot : G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & g \cdot h \end{array}$$

und ein Einselelement e (manchmal auch 1 oder id geschrieben), so dass gilt:

(1) Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ: $g \cdot (h \cdot i) = (g \cdot h) \cdot i$ für jede $g, h, i \in G$.
(2) Für jede $g \in G$ gilt $g \cdot e = e \cdot g = g$.
(3) Für jede $g \in G$ existiert $h \in G$, so dass $g \cdot h = h \cdot g = e$. Man schreibt $h = g^{-1}$.

Bemerkung. Man wird oft $gh = g \cdot h$ schreiben.

Definition. Sei G, H zwei Gruppen. Eine Abbildung $\varphi\colon G \to H$ heisst (Gruppenhomomorphismus) Homomorphismus, wenn gilt:

$$\varphi(g \cdot h) \quad = \quad \varphi(g) \cdot \varphi(h) \qquad \text{für alle } g, h \in H.$$

Wir schreiben $\mathrm{Hom}(G, H)$ die Menge von alle Homomorphismen $G \to H$.

Aufgabe. Für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to H$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \varphi(1) & = & 1 \\ \varphi(g^{-1}) & = & (\varphi(g))^{-1},\ \forall g \in G. \end{array}$$

Definition. Sei G eine Gruppe. Ein Homomorphismus $\varphi\colon G \to G$ heisst Endomorphismus von G.

Wir sagen, dass φ ein Automorphismus ist, wenn existiert $\psi\colon G \to G$ so dass gilt:

$$\varphi(\psi(g)) = \psi(\varphi(g)) = g \text{ für jede } g \in G.$$

Die Menge von allen Automorphismen von G ist $\mathrm{Aut}(G)$ geschrieben.

Aufgabe. Sei G eine Gruppe.

(1) Ein Endomorphismus von G ist ein Automorphismus genau wenn er bijektiv ist.
(2) Die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Gruppe, mit der binäre Verknüpfung

$$\begin{array}{rlcl} \circ : & \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G) & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ & (\varphi, \psi) & \mapsto & \varphi \circ \psi \end{array}$$

1.2. Aktionen.

Definition. Seien G, A zwei Gruppen. Eine (links)-Aktion von G auf A ist eine Abbildung

$$\begin{array}{c} G \times A \to A \\ (g,a) \mapsto g(a) \end{array}$$

so dass gilt:

$$\begin{array}{rcl} g(h(a)) & = & (gh)(a) \\ g(a)g(b) & = & g(ab) \end{array}$$

für jede $g, h \in G, a, b \in A$.

Aufgabe. Sei G eine Gruppe, die auf einer Gruppe A operiert.

(1) Für jede $g \in G$ ist die Abbildung

$$\psi_g \colon a \mapsto g(a)$$

ein Automorphismus von A.

(2) Die Abbildung $g \mapsto \psi_g$ is ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(A)$.

(3) Das gilt eine Bijektion zwischen die Menge von Aktionen von G auf A und die Menge $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(A))$.

1.3. Gruppenkohomologie – Definition von H^0 und H^1.

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer Gruppe A operiert. Wir definieren

$$H^0(G,A) = A^G = \{a \in A \mid g(a) = a \ \forall g \in G\}.$$

Lemma 1. *Die Menge $H^0(G,A)$ ist eine Untergruppe von A.*

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer Gruppe A operiert.

(1) Ein 1-Kozykel (oder gekreuzter Homomorphismus, oder 1-Koyklus) ist eine Abbildung

$$\nu \colon G \to A,$$

so dass gilt

$$\nu(gh) = \nu(g)g(\nu(h))$$

für jede $g, h \in G$.

Die Menge der 1-Kozykeln ist $Z^1(G,A)$ geschrieben.

(2) Wir sagen, dass zwei 1-Koyzeln $\nu, \tau \in Z^1(G,A)$ äquivalent sind (und schreiben $\nu \sim \tau$), wenn existiert $a \in A$, so dass gilt

$$\tau(g) = a^{-1}\nu(g)g(a)$$

für jedes $g \in G$.

(3) Die Menge der Äquivalenzklassen von 1-Kozykeln aus $Z^1(G,A)$ ist $H^1(G,A)$ geschrieben.

(4) Der 1-Kozykel $\nu_0 \in Z^1(G,A)$, der alles G auf 1 schickt heisst triviale 1-Kozykel. Seine Klasse in $H^1(G,A)$ heisst triviales Element von $H^1(G,A)$.

Wir beweisen jetzt, dass wir wirklich eine Äquivalenzrelation haben:

Lemma 2. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Gruppe A operiert. Seien $\nu, \tau, \sigma \in Z^1(G,A)$. Es gilt:*

(1) $\nu \sim \nu$;

(2) $\nu \sim \tau \Rightarrow \tau \sim \nu$;

(3) $\nu \sim \tau,\ \tau \sim \sigma \Rightarrow \nu \sim \sigma$.

Lemma und Definition 3. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Gruppe A operiert.*

(1) *Für jedes $a \in A$ ist die Abbildung*

$$\nu_a \colon \begin{array}{ccc} G & \to & A \\ g & \mapsto & a^{-1}g(a) \end{array}$$

ein 1-Kozykel. Solche 1-Kozykel wird 1-Koränder (*oder 1-Korand*) *nennen sein.*

(2) *Die Menge von allen 1-Körandern wird $B^1(G,A)$ geschrieben sein. Es ist die Menge von allen 1-Kozykeln, die äquivalent zum trivialen 1-Kozykel sind.*

In allgemein sind $Z^1(G,A)$, $B^1(G,A)$ und $H^1(G,A)$ keine Gruppen. Aber wenn A kommutativ ist, sind alle abelsche Gruppen und $H^1(G,A) = Z^1(G,A)/B^1(G,A)$:

Lemma 4. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Gruppe A operiert.*

Wenn A abelsch ist, gilt:

(1) *Die Menge $Z^1(G,A)$ ist eine abelsche Gruppe, mit der binäre Verknüpfung $(\nu,\tau) \mapsto \nu\tau$, wobei*

$$(\nu\tau)(g) = \nu(g)\tau(g)$$

für jedes $\nu, \tau \in Z^1(G,A)$ und $g \in G$.

(2) *Das Einselement von $Z^1(G,A)$ ist der triviale 1-Kozykel.*
(3) *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} A & \to & Z^1(G,A) \\ a & \mapsto & [g \mapsto a^{-1}g(a)] \end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Das Bild ist eine Untergruppe von $Z^1(G,A)$, die gleich $B^1(G,A)$ ist.
(4) *Zwei Element $\nu, \tau \in Z^1(G,A)$ sind äquivalent genau wenn $\nu\tau^{-1} \in B^1(G,A)$. Es folgt, dass*

$$H^1(G,A) = Z^1(G,A)/B^1(G,A)$$

eine abelsche Gruppe ist.
(5) *Das Einselement von $H^1(G,A)$ ist das triviale Element.*

Lemma 5. *Seien G, H zwei Gruppen. Wir nehmen die triviale Aktion von G auf H.*
(1) *Die Menge $Z^1(G,H)$ ist die Menge von allen Gruppenhomomorphismen $G \to H$.*
(2) *Zwei Element von $Z^1(G,H)$ sind äquivalent wenn sie konjugiert mit einem Element von H sind.*
(3) *Die Menge $H^1(G,H)$ ist die Menge von allen Gruppenhomomorphismen $G \to H$, bis auf Konjugation in H.*

2. Exakte Folgen

Wenn A nicht kommutativ ist, ist die Menge $H^1(G,A)$ in allgemein keine Gruppe, aber hat ein speziell triviales Element, das wir schon definiert haben. Es ist die Äquivalenzklasse von dem trivialem 1-Kozykel $G \to A$, der alles auf 1 schickt.

Definition. Eine punktierte Menge ist eine Menge M mit einer spezielle Element $1 \in M$.

Ein Homomorphismus $\varphi\colon M \to N$ von punktierten Mengen ist eine Abbildung $\varphi\colon M \to N$ so dass $\varphi(1) = 1$. Die Mengen $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) = 1\} \subset M$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) = \{\varphi(m) \mid m \in M\} \subset N$ sind auch punktierten Mengen, weil sie 1 enthalten.

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf zwei Gruppen A, B operiert. Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ heisst G-Gruppenhomomorphismus (oder G-äquivariant) wenn $g(\varphi(a)) = \varphi(g(a))$, für jede $a \in A, g \in G$.

Lemma 6. *Sei G eine Gruppe, die auf zwei Gruppen A, B operiert und sei $\varphi\colon A \to B$ ein G-Gruppenhomomorphismus.*
(1) *Es gilt ein Gruppenhomomorphismus:*

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_0\colon & H^0(G,A) & \to & H^0(G,B) \\ & a & \mapsto & \varphi(a). \end{array}$$

(2) *Es gilt ein Homomorphismen von punktierten Mengen :*

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_1\colon & H^1(G,A) & \to & H^1(G,B) \\ & [\nu] & \mapsto & [\varphi \circ \nu] \end{array}$$

wo $[\nu]$ die Äquivalenzklasse von $\nu \in Z^1(G,A)$ ist, und $[\varphi \circ \nu]$ die Äquivalenzklasse von $\varphi \circ \nu \in Z^1(G,B)$ ist.
(3) *Wenn A und B abelsch sind, ist φ_1 ein Gruppenhomomorphismus.*

Definition. Sei

$$\ldots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} M_{n+2} \xrightarrow{\varphi_{n+2}} \ldots$$

eine (endliche oder unendliche) Folge (oder Sequenz) von Homomorphismen von punktierten Mengen. Sie heisst exakt, wenn $\mathrm{Bild}(\varphi_n) = \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1})$ für alle (vorkommenden) n ist.

Satz 7. *Sei G eine Gruppe, die auf drei Gruppen A, B, C operiert. Sei*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 1$$

eine exakte Folge von G-Gruppenhomomorphismen (d.h. φ, ψ sind Gruppenhomomorphismen, φ ist injektiv, ψ ist surjektiv, $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$, und $g(\varphi(a)) = \varphi(g(a))$, $g(\psi(b)) = \psi(g(b))$ für jede $a \in A, b \in B, g \in G$).

Die Folge induziert eine exakte Folge von punktierten Mengen

$$1 \longrightarrow H^0(G,A) \xrightarrow{\varphi_0} H^0(G,B) \xrightarrow{\psi_0} H^0(G,C) \xrightarrow{\delta} H^1(G,A) \xrightarrow{\varphi_1} H^1(G,B) \xrightarrow{\psi_1} H^1(G,C)$$

wo δ definiert wie folgt ist:

für jedes $c \in H^0(G,C) = C^G$, wir nehmen $b \in B$ so dass $\psi(b) = c$; es existiert ein eindeutiges 1-Kozykel $\nu_b \colon G \to A$, so dass $\varphi(\nu_b(g)) = b^{-1}g(b)$ für jedes $g \in G$. Dann $\delta(c) \in H^1(G,A)$ ist die Äquivalenzklasse von ν_b, die nur abhängig von c ist.

Folgerung 8. *Sei G eine Gruppe, die auf drei Gruppen A, B, C operiert. Sei*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von G-Gruppenhomomorphismen.

Wenn $H^1(G,A)$ und $H^1(G,C)$ trivial sind, ist $H^1(G,B)$ auch trivial.

3. Hilbert 90

Satz 9 (Artin). *Sei G eine Gruppe, K ein Körper und $\chi_1, \dots, \chi_n \colon G \to K^*$ verschiedene Gruppenhomomorphismen (Charaktern). Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ Elementen, so dass*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i(g) = 0$$

für jedes $g \in G$. Dann gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Bemerkung. Dieser Satz sagt, dass $\chi_1, \dots, \chi_n$ lineare unabhängig sind, als Elementen von dem Vektorraum allen Abbibldungen $G \to K$.

Definition. Seien G eine Gruppe und K ein Körper. Eine (links)-Aktion von G auf K ist eine Abbildung

$$\begin{gathered} G \times K \to K \\ (g,a) \mapsto g(a) \end{gathered}$$

so dass gilt:

$$\begin{aligned} g(h(a)) &= (gh)(a) \\ g(a)g(b) &= g(ab) \\ g(a) + g(b) &= g(a+b) \end{aligned}$$

für jede $g, h \in G, a, b \in K$.

Bemerkung. Eine Aktion von G auf einen Körper K gilt eine Aktion von G auf die Gruppen $(K, +)$ und $(K^*, \cdot)$.

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf eine Menge M operiert (z.B. M kann eine Gruppe oder ein Körper sein). Wir sagen, dass die Operation treu ist wenn gilt:

für jedes $g \in G$ gibt es $m \in M$, so dass $g(m) \neq m$.

Aufgabe. Eine Operation von einer Gruppe G auf einer Menge M ist treu, genau wenn alle Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \tau_g \colon & M & \to & M \\ & m & \mapsto & g(m) \end{array}$$

verschieden sind.

Satz 10. *Sei G ein endlicher Gruppe, die auf einen Körper K operiert, durch eine treue Aktion. Es gilt*

$$H^1(G, K^*) = \{1\}.$$

Satz: Sei G ein endlicher Gruppe, die auf einen Körper K operiert, durch eine treue Aktion. Es gilt

$$H^1(G, \mathrm{GL}(n, K)) = \{1\}.$$

Folgerung 11 (Hilbert 90). *Sei K ein Körper und $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ ein Automorphismus von endlicher Ordnung n. Sei $a \in K$ Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) $a\sigma(a) \cdots \sigma^{n-1}(a) = 1$.
(2) *es existiert $b \in K^*$, so dass $a = b^{-1}\sigma(b)$.*

***Satz* 90. Jede ganze oder gebrochene Zahl $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{K}$, deren Relativnorm in Bezug auf $\boldsymbol{k}$ gleich 1 ist, wird die symbolische $(1-\boldsymbol{S})$te Potenz einer gewissen ganzen Zahl $\boldsymbol{B}$ des Körpers $\boldsymbol{K}$.**

4. Exakte Folgen und Semidirektes Produkt

Definition. Seien N, H zwei Gruppen, so dass H auf N operiert.
Wir definieren eine Gruppe $N \rtimes H$ wie folgt:
als Menge ist $N \rtimes H$ gleich als $N \times H = \{(n,h) \mid n \in N, h \in H\}$. Die Verknüpfung ist die folgende:

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 h_1(n_2), h_1 h_2).$$

Aufgabe. $N \rtimes H$ ist eine Gruppe, mit Einselement $(1,1)$.

Bemerkung. Die Gruppe $N \rtimes H$ ist wirklich abhängig von der Aktion von H auf N.

Beispiel. Wenn die Aktion von H auf N trivial ist, gilt $N \rtimes H = N \times H$.

Aufgabe. Seien $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Die Gruppe $N \rtimes H$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ wenn die Aktion trivial ist, oder zur $\mathrm{Sym}_3 = D_6$ wenn die Aktion nicht trivial ist.

Lemma 12. *Es gibt zwei Injektive Gruppenhomomorphismen*

$$\begin{array}{ccc} N & \to & N \rtimes H \\ n & \mapsto & (n,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H & \to & N \rtimes H \\ h & \mapsto & (1,h). \end{array}$$

Wir können dann sehen N und H als Untergruppen von $N \rtimes H$. Es gilt:

1. *Die Gruppe N ist normal in $N \rtimes H$.*
2. *$N \cap H = \{1\}$.*
3. *Die Abbildung $N \times H \to N \rtimes H$, die (n,h) auf $n \cdot h$ schickt is bijektiv. Die Gruppen N und H erzeugenden dann $N \rtimes H$.*

Definition. Sei $\psi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Ein Gruppenhomomorphismus $\rho\colon H \to G$ ist ein Schnitt von ψ wenn $\psi \circ \rho = \mathrm{id}_H$.

Bemerkung. ψ hat ein Schnitt $\Rightarrow$ ψ ist surjektiv.

Satz 13. *Sei $\psi\colon G \to H$ ein surjektive Gruppenhomomorphismus und sei $\rho\colon H \to G$ ein Schnitt. Wir schreiben $N = \ker(\psi)$ und haben eine exakte Folge von Gruppen*

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 1.$$

Es gibt eine Aktion von H auf N durch

$$h(n) = \rho(h) n \rho(h)^{-1}$$

für jedes $n \in N$, $h \in H$. Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & G & \to & N \rtimes H \\ & g & \mapsto & (g \cdot \rho(\psi(g))^{-1}, \psi(g)) \end{array}$$

ist ein Gruppenisomorphismus, mit inverse

$$\begin{array}{cccc} \tau\colon & N \rtimes H & \to & G \\ & (n,h) & \mapsto & n\rho(h) \end{array}$$

Folgerung 14. *Sei G eine Gruppe, und $N, H \subset G$ zwei Untergruppen, so dass*

1. *N ist normal in G.*
2. *$H \cap N = \{1\}$.*
3. *Die Gruppen H, N erzeugenden G.*

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} N \rtimes H & \to & G \\ (n,h) & \mapsto & n \cdot h \end{array}$$

ist ein Gruppenisomorphismus, wo die Aktion von H auf N durch $h(n) = hnh^{-1}$ gegeben ist.

Lemma 15. *Sei $G = N \rtimes H$ ein Semi-direktes Produkt, sei $\pi \colon G \to H$ die Projektion.*

Die Menge von Schnitte $H \to G$ von π, bis auf Konjugation durch ein Element von N, ist gleich $H^1(G, N)$.

Mit Kohomologiemengen kann man Konjugationsklassen in Semidirekte Produkten beschreiben.

Definition. Sei K ein Körper, und $\mathrm{Aff}_n(K)$ die Menge von allen Affinen transformationen von K^n:

$$\mathrm{Aff}_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\} \cong K^n \rtimes \mathrm{GL}(n, K).$$

Lemma 16. *Sei K von characteristik 0.*

(1) *Jede Element von $\mathrm{Aff}_n(K)$ von endlicher Ordnung ist konjugiert zu einem Element von $\mathrm{GL}(n, K)$.*

(2) *Zwei Elementen von $\mathrm{GL}(n, K)$ von endlicher Ordnung sind konjugiert in $\mathrm{Aff}_n(K)$ genau wenn sie konjugiert in $\mathrm{GL}(n, K)$ sind.*

5. Kommutative Kohomologie

5.1. Homogene Funktionen.

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf eine *abelsche* Gruppe A operiert. Für jedes $n \geq 0$ definieren wir

$$C^n(G,A) = \{f : G^{n+1} \to A \mid f(hg_0, \ldots, hg_n) = h(f(g_0, \ldots, g_n)), \forall g_0, \ldots, g_n, h \in G\}$$

Weil A abelsch ist, ist $C^n(G,A)$ eine abelsche Gruppe, mit der Verknüpfung

$$(f + f')(x) = f(x) + f'(x), f, f' \in C^n(G,A), x \in G^{n+1}.$$

Wir definieren eine Abbildung $\delta_n : C_{n-1}(G,A) \to C_n(G,A)$

$$\begin{aligned} \delta_n(f)((g_0, \ldots, g_n)) &= f(g_1, \ldots, g_n) - f(g_0, g_2, \ldots, g_n) + f(g_0, g_1, g_3, \ldots, g_n) \cdots + (-1)^n f(g_0, \ldots, g_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n) \end{aligned}$$

Lemma 17. (1) *Für jedes n ist δ_n ein Gruppenhomomorphismus $C_{n-1}(G,A) \to C_n(G,A)$.*
(2) *Für jedes n ist $\delta_{n+1} \circ \delta_n$ die triviale Abbildung (d.h. $\mathrm{Bild}(\delta_n) \subset \mathrm{Ker}(\delta_{n+1})$).*

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer abelsche Gruppe operiert. Wir definieren

$$\begin{aligned} Z^n(G,A) &= \mathrm{Ker}(\delta^{n+1}) \subset C_n(G,A) \text{ für } n \geq 0 \\ B^0(G,A) &= 0 \subset Z^0(G,A) \\ B^n(G,A) &= \mathrm{Bild}(\delta^n) \subset Z^n(G,A) \text{ für } n \geq 1 \\ H^n(G,A) &= Z^n(G,A)/B^n(G,A). \text{ für } n \geq 0 \end{aligned}$$

5.2. Inhomogene Abbildungen.

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf eine *abelsche* Gruppe A operiert. Wir definieren

$$\mathcal{C}^0(G,A) = A,$$

$$\mathcal{C}^n(G,A) = \{f : G^n \to A\}, \ n \geq 1.$$

Die Mengen $\mathcal{C}^n(G,A)$ sind abelsche Gruppen. Für $n = 0$ ist die Verknüpfung durch die Gruppenstruktur von A gegeben. Für $n \geq 1$ definieren wir $(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$.

Lemma 18. *Die folgenden Abbildungen sind Gruppenisomorphismen:*

$$\begin{aligned} C^0(G,A) &\xrightarrow{\rho_0} \mathcal{C}^0(G,A) \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^n(G,A) &\xrightarrow{\rho_n} \mathcal{C}^n(G,A) \\ f &\mapsto [(g_1, \ldots, g_n) \mapsto f(1, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1g_2 \ldots g_n)] \end{aligned}$$

Die Isomorphismen ρ_i geben inhomogenen Abbildungen $\tilde{\delta}_i : \mathcal{C}^i(G,A) \to \mathcal{C}^{i+1}(G,A)$, die definiert als $\tilde{\delta}_i = \rho_i \delta_i (\rho_{i-1})^{-1}$ sind:

$$\begin{tikzcd}
C^0(G,A) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\rho_0"] & C^1(G,A) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\rho_1"] & C^2(G,A) \arrow[r, "\delta_3"] \arrow[d, "\rho_2"] & \cdots \\
\mathcal{C}^0(G,A) \arrow[r, "\tilde{\delta}_1"] & \mathcal{C}^1(G,A) \arrow[r, "\tilde{\delta}_2"] & \mathcal{C}^2(G,A) \arrow[r, "\tilde{\delta}_3"] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

Lemma 19. *Die Gruppenhomomorphismen $\tilde{\delta}_i$ sind die folgenden Abbildungen:*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\delta}_1\colon \mathcal{C}^0(G,A) & \to & \mathcal{C}^1(G,A) \\ a & \mapsto & [g \mapsto g(a) - a] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\delta}_2\colon \mathcal{C}^1(G,A) & \to & \mathcal{C}^2(G,A) \\ f & \mapsto & [(g_1,g_2) \mapsto g_1 f(g_2) - f(g_1g_2) + f(g_1)] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\delta}_n\colon \mathcal{C}^{n-1}(G,A) & \to & \mathcal{C}^n(G,A) \\ f & \mapsto & \left[\begin{array}{ccl} (g_1,\dots,g_n)) & \mapsto & g_1(f(g_2,\dots,g_n)) \\ & & +\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f(g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\dots,g_n) \\ & & +(-1)^n f(g_1,\dots,g_{n-1}) \end{array} \right] \end{array}$$

Nach Lemma 19 und Definition 5.1 sehen wir, dass $H^0(G,A)$ und $H^1(G,A)$ gleich als früher sind. In inhomogene Koordinaten haben wir
$H^0(G,A) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_1) = A^G$
$H^1(G,A) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_2)/\mathrm{Bild}(\tilde{\delta}_1)$

5.3. **Die Gruppe $H^2(G,A)$.** Nach Lemma 19

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\delta}_3\colon \mathcal{C}^2(G,A) & \to & \mathcal{C}^3(G,A) \\ f & \mapsto & \left[\begin{array}{ccl} (g_1,g_2,g_3)) & \mapsto & g_1(f(g_2,g_3)) \\ & & -f(g_1g_2,g_3) + f(g_1,g_2g_3) \\ & & -f(g_1,g_2). \end{array} \right] \end{array}$$

Die inhomogene 2-Kozykeln sind dann Abbildungen $f\colon G^2 \to A$, so dass

$$f(g_1g_2,g_3) + f(g_1,g_2) = f(g_1,g_2g_3) + g_1(f(g_2,g_3))$$

und die inhomogene 2-Korändern sind die Abbildungen

$$f(g_1,g_2) = a(g_1) - a(g_1g_2) + g_1(a(g_2))$$

wo $a\colon G \to A$ eine beliebige Abbildung ist.

Definition. Eine 2-Kozykel $\nu\colon G^2 \to A$ heisst *normalisiert* wenn $\nu(g,1) = \nu(1,g) = 0$ für jedes $g \in G$.

Lemma 20. *Jede Klasse $c \in H^2(G,A)$ enthält eine* normalisiert 2-*Koyzkel*

Geben A, G, wir betrachten alle exakte Folgen von Gruppenhomomorphismen (wir schreiben jetzt A multiplikativ, weil H nicht kommutativ in allgemein ist)

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow H \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1,$$

so dass $hah^{-1} = \pi(h)(a)$ für jedes $h \in H$. Wir sagen dann dass zwei solche exakte Folge sind äquivalent wenn ein folgendes kommutatives Diagram existiert

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & H \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & H' \arrow[r, "\pi'"] & G \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

wo φ ein Isomorphismus ist. Die Menge von Äquivalenzklassen ist $\mathrm{EXT}(A,G)$ genommen. Es ist eine punktierte Menge, wo das triviale Element die triviale exakte Folge

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow A \rtimes G \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

ist.

Satz 21 (Schreier)**.** *Wir haben eine kanonische Isomorphismus von Punktierte Mengen*

$$\mathrm{EXT}(A,G) \to H^2(G,A).$$

5.4. **Exakte Folgen mit Kommutative Kohomologie.**

Lemma 22. *Sei G eine Gruppe, die auf zwei* abelsche *Gruppen A, B operiert und sei $\varphi\colon A \to B$ ein G-Gruppenhomomorphismus.*

Es induziert ein Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_*\colon & C^n(G,A) & \to & C^n(G,B) \\ & f & \mapsto & \varphi \circ f, \end{array}$$

und ein Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_n\colon & H^n(G,A) & \to & H^n(G,B) \\ & [f] & \mapsto & [\varphi \circ f]. \end{array}$$

Bemerkung. Nach Lemma 18 haben wir Gruppenisomorphismen

$$\begin{array}{rcl} C^0(G,A) & \xrightarrow{\rho_0} & \mathcal{C}^0(G,A) \\ f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} C^n(G,A) & \xrightarrow{\rho_n} & \mathcal{C}^n(G,A) \\ f & \mapsto & [(g_1,\dots,g_n) \mapsto f(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2\dots g_n)] \end{array}$$

Es folgt, dass

$$\begin{array}{rcl} \varphi \circ \rho_0 & = & \rho_0 \circ \varphi_* \\ \varphi_* \circ \rho_n & = & \rho_n \circ \varphi_*, n \geq 1. \end{array}$$

Wir können dann auch einfach die φ_i mit inhomogenen Funktionen rechnen. Die Abbildungen φ_0, φ_1 sind die gleiche Abbildungen als die definieret in Lemma 6:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_0\colon & H^0(G,A) & \to & H^0(G,B) \\ & a & \mapsto & \varphi(a). \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_n\colon & H^n(G,A) & \to & H^n(G,B) \\ & [\nu] & \mapsto & [\varphi \circ \nu] \end{array}$$

wo $[\nu]$ die Äquivalenzklasse von $\nu \in Z^n(G,A)$ ist, und $[\varphi\circ\nu]$ die Äquivalenzklasse von $\varphi\circ\nu \in Z^n(G,B)$ ist.

Lemma 23 (Schlangenlemma)**.** *Sei*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi'"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\psi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\varphi'"] & A \arrow[r, "\pi'"] & C' & \end{tikzcd}$$

ein kommutative Diagramm von Gruppenhomomorphismen, wo beide Reihen exakten Folgen sind.

Es existiert eine kanonische Exakte Folge

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathrm{Ker}(\psi') \xrightarrow{\overline{\varphi}} \mathrm{Ker}(\psi) \xrightarrow{\overline{\pi}} \mathrm{Ker}(\psi'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\psi') \xrightarrow{\overline{\varphi}'} \mathrm{Coker}(\psi) \xrightarrow{\overline{\pi}'} \mathrm{Coker}(\psi'') \to \mathrm{Coker}(\pi')$$

wo $\overline{\varphi}$, $\overline{\pi}$ Einschränkungen von φ, π sind und wo $\overline{\varphi}'$, $\overline{\pi}'$ induziert von φ', π' sind.

Satz 24. *Sei G eine Gruppe, die auf drei* abelsche *Gruppen A, B, C operiert. Sei*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 1$$

eine exakte Folge von G-Gruppenhomomorphismen (d.h. φ, ψ sind Gruppenhomomorphismen, φ ist injektiv, ψ ist surjektiv, $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$*, und $g(\varphi(a)) = \varphi(g(a))$, $g(\psi(b)) = \psi(g(b))$ für jede $a \in A, b \in B, g \in G$).*

Die Folge induziert eine exakte Folge von Gruppenhomomorphismen

$$1 \longrightarrow H^0(G,A) \xrightarrow{\varphi_0} H^0(G,B) \xrightarrow{\psi_0} H^0(G,C) \xrightarrow{\delta_1} H^1(G,A) \xrightarrow{\varphi_1} H^1(G,B) \xrightarrow{\psi_1} H^1(G,C) \xrightarrow{\delta_2} H^2(G,A) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow H^n(G,A) \xrightarrow{\varphi_n} H^n(G,B) \xrightarrow{\psi_n} H^n(G,C) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H^{n+1}(G,A) \xrightarrow{\varphi_{n+1}} H^{n+1}(G,B) \xrightarrow{\psi_{n+1}} \dots$$

5.5. **Induzierte G-Gruppen.**

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer abelsche Gruppe operiert. Wir definieren

$$\mathrm{Abb}^n(G,A) = \{f\colon G^{n+1} \to A\}.$$

Diese Menge ist eine Gruppe: $(f+f')(x) = f(x) + f'(x)$.

Bemerkung. Wir bemerken, dass G auf $\mathrm{Abb}^n(G,A)$ operiert, durch

$$(g(f))(g_0,\dots,g_n) = g(f(g^{-1}g_0,\dots,g^{-1}g_n))$$

und dass

$$C^n(G,A) = \mathrm{Abb}^n(G,A)^G = \{f \in \mathrm{Abb}^n(G,A) \mid g(f) = f,\ \forall g \in G\}.$$

Definition. Wir definieren eine Abbildung $\delta_n\colon \mathrm{Abb}^{n-1}(G,A) \to \mathrm{Abb}^n(G,A)$

$$\begin{array}{rcl} \delta_n(f)((g_0,\dots,g_n)) & = & f(g_1,\dots,g_n) - f(g_0,g_2,\dots,g_n) + f(g_0,g_1,g_3,\dots,g_n) \dots + (-1)^n f(g_0,\dots,g_{n-1}) \\ & = & \sum_{i=0}^n (-1)^i f(g_0,\dots,\hat{g}_i,\dots,g_n) \end{array}$$

Bemerkung. Die Abbildung $\delta_n\colon C^{n-1}(G,A) \to C^n(G,A)$, die schon definiert war, ist die Einschränkung von der Abbildung $\delta_n\colon \mathrm{Abb}^{n-1}(G,A) \to \mathrm{Abb}^n(G,A)$.

Lemma 25. *Die Folge*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Abb}^0(G,A) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Abb}^1(G,A) \xrightarrow{\delta_2} \mathrm{Abb}^2(G,A) \dots$$

ist eine exakte Folge von G-Gruppenhomomorphismen,
wo $\delta_0(a) \in \mathrm{Abb}^0(G,A) = \mathrm{Abb}(G,A)$ die Abbildung die alles auf a schickt ist.

Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer abelsche Gruppe A operiert.
Man sagt, dass A unzyklisch ist (acyclic), wenn

$$H^n(G,A) = 0$$

für jedes $n > 0$.
Man sagt, dass A welk ist (flasque auf Französisch, cohomologically trivial auf Englisch), wenn

$$H^n(H,A) = 0$$

für jedes Untergruppe $H \subset G$ und jedes $n > 0$.
Man sagt, dass A ein induzierte G-Modul ist, wenn $A = \mathrm{Abb}(G,B)$ für ein abelsche Gruppe B, auf der G operiert (und wo die Aktion auf A, die Aktion von B ist).

Der Satz 27 sagt, dass induzierte G-Moduln welk sind.

Lemma 26. *Sei G eine gruppe, die auf einer abelsche Gruppe A operiert, und sei $H \subset G$ eine Untergruppe.*
Die Gruppe H operiert auf $\mathrm{Abb}(G,A)$, und es existiert ein G-Modul B und ein H-Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{Abb}(G,A) \to \mathrm{Abb}(H,B).$$

Satz 27. *Sei G eine Gruppe, die auf einer abelsche Gruppe A operiert. Die Gruppe $\mathrm{Abb}(G,A)$ ist welk.*

6. Galoiskohomologie

Definition. Eine Körpererweiterung L/K (Körpererweiterung F über K) ist die Annahmen von zwei Körper L, K, und ein (injektive) Ringhomomorphismus $K \to L$.

Die Galoisgruppe von L über K ist

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \{g \in \mathrm{Aut}(L) \mid g(k) = k,\ \forall k \in K\}.$$

Man hat immer $K \subset L^{\mathrm{Gal}(L/K)} = \{l \in L \mid g(l) = l, \forall g \in G\}$ Man sagt, dass L/K eine Galoiserweiterung ist (oder dass L galoissch über K ist), wenn $K = L^{\mathrm{Gal}(L/K)}$.

Lemma 28. *Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Körper L operiert, und sei $K = L^G$.*
1) *Die Körpererweiterung L/G ist eine Galoiserweiterung.*
2) *Es existiert ein Element $\theta \in L$, so dass*

$$L = \bigoplus_{g \in G} g(\theta)K.$$

Das meint, dass $\{g(\theta) \mid g \in G\}$ ein Basis des K-Vektorraums L ist.

Folgerung 29. *Sei L/K eine Galoiserweiterung. Wenn* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *endlich ist, ist der Körper L ist ein K-Vektorraum von dimension* $|\mathrm{Gal}(L/K)|$.

Folgerung 30. *Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Körper L operiert.*
Das G-Modul L ist ein induzierte G-Modul. Es ist dann welk.

Definition. Sei K ein Körper. Ein K-Algebra ist ein kommutatives Ring A, mit ein injektive Gruppenhomomorphismus $K \to A$.

Seien A, B zwei K-Algebren. Ein Homorphismus (Isomorphismus) von K-Algebren $\varphi\colon A \to B$ ist ein Ringhomomorphismus (Ringisomorphismus), so dass $\varphi(k) = k$ für jedes $k \in K$.

Beispiel. Der Polynomring $K[x_1, \dots, x_n]$ ist eine K-Algebra.

Seien $f_1, \dots, f_k \in K[x_1, \dots, x_n]$. Wenn das Ideal $(f_1, \dots, f_k)$ nicht alles ist, ist $K[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_k)$ eine K-Algebra.

Alle endliche K-Algebren sind wie das.

Bemerkung. Sei L/K eine Körpererweiterung. Jede L-Algebra ist eine K-Algebra. Für jede K-Algebra A, ist $A \otimes_K L$ eine L-Algebra.

Beispiel. $A = K[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow A \otimes_K L = L[x_1, \dots, x_n]$
$A = K[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_k) \Rightarrow A \otimes_K L = L[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_k)$

Definition. Sei L/K eine Körpererweiterung und A eine K-Algebra. Eine L/K-Form von A ist eine K-Algebra B, so dass die L-Algebren

$$A \otimes_K L \text{ und } B \otimes_K L$$

isomorph sind (durch ein Isomorphismus von L-Algebren).

Bemerkung. Wenn B isomorph zu A ist, als K-Algebren, sind immer $A \otimes_K L$ und $B \otimes_K L$ isomorph als L-Algebren. In diesem Fall, wir sagen dass B eine triviale Form von A ist.

Beispiel. Sei $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$.

Sei $A = K[x_1, x_2]/(x_1^2 + x_2^2 + 1)$, $B = K[x_1, x_2]/(x_1^2 + x_2^2 - 1)$

Die K-Algebra B ist eine nicht triviale L/K-Form von A.

Satz 31. *Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und A eine endliche K-Algebra. Es gibt eine kanonische bijektive Abbildung*

$$H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{Aut}_L(A \otimes_K L)) \xrightarrow{\sim} \{L/K - \textit{Formen von } A\}_{/\sim},$$

wo zwei L/K-Formen von A äquivalent sind, wenn sie isomorph als K-Algebren sind.

Definition. Sei K ein Körper. Eine Brauer-Severi Varietät über K, von Dimension n, ist eine algebraische varietät X, definiert über K, so dass X isomorph zu $\mathbb{P}^n$ über L ist, für eine Galoiserweiterung L/K.

Beispiel. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{Q}$.

Die K-Varietät $X \subset \mathbb{P}^2$, die mit der Gleichung $(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$ definiert ist, ist eine Brauer-Severi Varietät. Die ist isomorph zu $\mathbb{P}^1$ über $L = K[\mathbf{i}]$, aber nicht über K, ist.

Definition. Sei L/K eine Galoiserweiterung. Wir definieren $\mathrm{BSL}_n(L/K)$ als die Menge von Brauer-Severi Varietäten über K, die Isomorph zu $\mathbb{P}^{n-1}$ über L sind, bis isomorphismus von K-Varietäten.

Satz 32. *Es gibt eine kanonische bijektive Abbildung* $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{PGL}_n(L)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{BSL}_n(L/K)$

Bemerkung. Die Exakte Folge von Gruppenhomomorphismen

$$1 \longrightarrow L^* \longrightarrow \mathrm{GL}_n(L) \xrightarrow{\pi} \mathrm{PGL}_n(L) \longrightarrow 1$$

ist auch eine exakte Folge von G-Gruppenhomomorphismen, wo $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

$$\longrightarrow H^1(G, L^*) \longrightarrow H^1(G, \mathrm{GL}_n(L))) \longrightarrow H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L))) \longrightarrow H^2(G, L^*) \rightarrow$$

Wir wissen, dass $H^1(G, \mathrm{GL}_n(L)))$ ist trivial. Die Menge $H^1(G, \mathrm{PGL}_n(L)))$ ist dann trivial, wenn die Brauer Gruppe $H^2(G, L^*)$ trivial ist.