Übungen - Blatt 8

Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe, die auf einer abelsche Gruppe A operiert.
Wir sagen, dass ein n-Kozykel $f \in \mathscr{C}^n(G,A)$ ist *normalisiert* wenn gilt

$$g_i = 1 \Rightarrow f(g_1,\ldots,g_n) \text{ ist trivial für jede } g_1,\ldots,g_{i-1},g_{i+1},\ldots,g_n \in G$$

Beweisen Sie, dass jede Element $f \in Z^n(G,A) \subset \mathscr{C}^n(G,A)$ äquivalent zu einem normalisierte 1-Kozykel ist.

Tipp: Nach Induktion definieren Sie $f_0,\ldots,f_n \in \mathscr{C}^n(G,A)$ und $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ so dass

$$f_0 = f,\ f_i = f_{i-1} - \tilde{\delta}_n(\varphi_i) \text{ für } i = 1,\ldots,n$$
$$\varphi_i(g_1,\ldots,g_{n-1}) = (-1)^{i-1} f_{i-1}(g_1,\ldots,g_{i-1},1,g_i,\ldots,g_{n-1}) \text{ für } i = 1,\ldots,n$$

und Beweisen Sie, dass f_n normalisiert ist, und $f - f_n$ ein n-Koränder ist.

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe, die auf einer abelsche Gruppe A operiert.
Sei $f\colon G^2 \to A$ eine normalisierte 2-Kozykel. Wir definieren dann eine Verknüpfung auf der Menge $A \times G$:

$$(a_1,g_1)(a_2,g_2) = (f(g_1,g_2) + a_1 + g_1(a_2), g_1g_2).$$

Beweisen Sie, dass die Menge $A \times G$, mit dieser Verknüpfung eine Gruppe ist, mit Neutralelement $(0,1)$.

Aufgabe 3

Sei G die Gruppe mit zwei Elementen und sei $\sigma \in G$ die nicht triviale Element. Die Gruppe G operiert auf einer abelsche Gruppe A.
Sei $f\colon G^2 \to A$ eine normalisierte 2-Kozykel. Wir definieren $\nu(f) = f(\sigma,\sigma) \in A$. Beweisen Sie, dass ν ein Isomorphismus

$$H^2(G,A) \to A^G/\{a\sigma(a) \mid a \in A\}$$

induziert.