Übungen - Blatt 2

Aufgabe 1

Sei G die Gruppe mit zwei Elementen, die auf einer Gruppe A operiert. Sei $\sigma \in G$ das nicht triviale Element.
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Die Menge $Z^1(G,A)$ ist bijektiv zu $\{a \in A \mid a\sigma(a) = 1\}$, und diese Bijektion schickt $B^1(G,A)$ auf $\{b^{-1}\sigma(b) \mid b \in A\}$.
2. Die Gruppe G operiert auf $(\mathbb{C},+)$ und $(\mathbb{C}^*,\cdot)$, mit $\sigma(x) = \bar{x}$ für jedes $x \in \mathbb{C}$. Die Gruppen $H^1(G,\mathbb{C})$ und $H^1(G,\mathbb{C}^*)$ sind trivial.
3. Die Gruppe G operiert auf jede Gruppe A, mit $\sigma(a) = a^{-1}$. Mit dieser Aktion gibt
   (a) $H^1(G,\mathbb{C}^*)$ ist trivial.
   (b) $H^1(G,\mathbb{Q}^*)$ ist unendlich.
   (c) Für jede endliche abelsche Gruppe A gilt $H^1(G,A) = \{1\}$ genau wenn $|A| \equiv 1 \pmod 2$.

Aufgabe 2

Sei G eine zyklische Gruppe von endlich Ordnung n, erzeugt von $\xi \in G$. Die Gruppe G operiert auf einer Gruppe A.
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Die Menge $Z^1(G,A)$ ist bijektiv zu $\{a \in A \mid a\xi(a)\xi^2(a)\cdots\xi^{n-1}(a) = 1\}$, und diese Bijektion schickt $B^1(G,A)$ auf $\{b^{-1}\xi(b) \mid b \in A\}$.
2. Wir nehmen $A = (\mathbb{C}[x],+)$ (Polynomen über $\mathbb{C}$), und die Aktion $\xi(P(x)) = P(\zeta x)$, wo $\zeta = e^{2i\pi/n}$. Dann gilt $H^1(G,A) = \{1\}$.

   Tipp: Schreiben Sie ein Polynom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ von Grad d als $P = P_1 + \cdots + P_d$, wo P_i homogen von Grad i ist. Es gilt $\xi(P) = \xi(P_1) + \cdots + \xi(P_d)$.

Aufgabe 3

Sei $G = \{1,\sigma\}$ die Gruppe mit zwei Elementen, die auf $\mathbb{C}^n$ und $(\mathbb{C}^*)^n$ operiert, durch $\sigma(x_1,\ldots,x_n) = (\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$.
Beweisen Sie, dass $H^1(G,\mathbb{C}^n)$ und $H^1(G,(\mathbb{C}^*)^n)$ trivial sind.
Tipp: Schreiben Sie exakte Folgen und benützen Sie Aufgabe 1 für $n = 1$.