Übungen - Blatt 10

Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe, die auf drei *abelsche* Gruppen A,B,C operiert. Sei

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 1$$

eine exakte Folge von G-Gruppenhomomorphismen.
Beweisen Sie, dass das folgende Diagram

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{C}^n(G,A)/B^n(G,A) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\delta_n"] & \mathscr{C}^n(G,B)/B^n(G,B) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "\delta_n"] & \mathscr{C}^n(G,C)/B^n(G,C) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n"] & 1 \\
1 \arrow[r] & Z^{n+1}(G,A) \arrow[r, "\varphi_*"] & Z^{n+1}(G,B) \arrow[r, "\psi_*"] & Z^{n+1}(G,C) &
\end{tikzcd}$$

ein kommutative Diagramm von Gruppenhomomorphismen ist, wo beide Reihen exakten Folgen sind.
Ist die Abbildung ψ_* surjektiv?
Ist die Abbildung φ_* injektiv?

Aufgabe 2

Sei

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagram von abelsche G-Gruppenhomomorphismen, wo beide Reihe exakt sind. Beweisen Sie, dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
H^n(G,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h_*"'] & H^{n+1}(G,A) \arrow[d, "f_*"'] \\
H^n(G,C') \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}(G,A')
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.