Übungen - Blatt 1

Aufgabe 1

Seien G, H Gruppen. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:
Für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to H$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \varphi(1) & = & 1 \\ \varphi(g^{-1}) & = & (\varphi(g))^{-1},\ \forall g \in G. \end{array}$$

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Ein Endomorphismus von G ist ein Automorphismus genau wenn er bijektiv ist.
2. Die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Gruppe, mit der binäre Verknüpfung

$$\begin{array}{rrcl} \circ\colon & \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G) & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ & (\varphi, \psi) & \mapsto & \varphi \circ \psi \end{array}$$

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe, die auf einer Gruppe A operiert. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für jede $g \in G$ ist die Abbildung
$$\psi_g\colon a \mapsto g(a)$$
ein Automorphismus von A.
2. Die Abbildung $g \mapsto \psi_g$ is ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(A)$.
3. Das gilt eine Bijektion zwischen die Menge von Aktionen von G auf A und die Menge $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(A))$.

Aufgabe 4

Sei G eine Gruppe, die auf eine Menge M operiert (z.B. M kann eine Gruppe oder ein Körper sein). Wir sagen, dass die Operation treu ist wenn gilt:

für jedes $g \in G$ gibt es $m \in M$, so dass $g(m) \neq m$.

Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Eine Operation von einer Gruppe G auf einer Menge M ist treu, genau wenn alle Abbildungen

$$\begin{array}{rrcl} \tau_g\colon & M & \to & M \\ & m & \mapsto & g(m) \end{array}$$

verschieden sind.