

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

JÉRÉMY BLANC*

Université de Grenoble I
Institut Fourier, BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères, France
Jeremy.Blanc@fourier.ujf-grenoble.fr

Abstract. We give a complete classification of maximal algebraic subgroups of the Cremona group $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ and provide algebraic varieties that parametrize the conjugacy classes.

Résumé. Nous donnons une classification complète des sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ et explicitons les variétés qui paramètrent les classes de conjugaison.

Translated Introduction

If X is an algebraic complex variety, we denote by $\text{Bir}(X)$ its group of birational transformations (birational maps from X to itself). We say that a subgroup $G \subset \text{Bir}(X)$ is *algebraic* if there exists a structure of an algebraic group on G such that the action $t : G \times X \dashrightarrow X$ induced by the inclusion of G into $\text{Bir}(X)$ is a rational map. The reader can verify that t satisfies the classical axioms of rational actions of algebraic groups (in particular, that t is defined in $e \times X$); the fact that a finite subgroup of $\text{Bir}(X)$ is algebraic may also be verified.

The group $\text{Bir}(\mathbb{P}^1)$ is a well-known algebraic group, isomorphic to $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. If $n \geq 2$, the group $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ is not algebraic; this complicates the understanding of the structure of the group.

The algebraic subgroups of $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ have interested many mathematicians for a long time. For $n = 2$, we cite the complete classification of maximal connected algebraic subgroups of $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ established by F. Enriques [E1893], where the author proves that every maximal connected algebraic subgroup of $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ is the conjugate of the identity component of the automorphism group of a minimal rational surface. A modern proof may be found in [Um82b]. For $n = 3$, the classification of maximal connected algebraic subgroups is due to F. Enriques and G. Fano; a modern treatment may be found in [Ume80], [Ume82], [Um82b], and [Ume85] (the results are also explained in [Oda88]). We also cite the study of maximal connected algebraic subgroups of $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ that contain a torus of dimension n made by M. Demazure [Dem70].

DOI:10.1007/s00031-008-9046-5

*Soutenu par le fonds national suisse de la recherche scientifique (FNRS).

Received February 21, 2008. Accepted July 4, 2008.

For nonconnected subgroups, only a few of results are known, even in dimension 2. A lot of results exist in the case of finite subgroups (see [K1895], [W1896], [BB00], [dFe04], [BB04], [Bea07], the survey [Isk05] and its references, and more recently [DI07], [Bla07], [Bla07b], [Bla07c]), but these results do not show which finite groups are maximal algebraic subgroups. There are also some remaining open questions in the classification of finite subgroups (see the section “What is left?” of [DI07]), like the parametrization of conjugacy classes and the precise description of automorphism groups of conic bundles.

This paper provides a study, with recent tools, of algebraic subgroups of $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. We show that any algebraic subgroup of $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ is contained in a maximal algebraic subgroup and give a complete classification of the maximal algebraic subgroups, and a parametrization of the conjugacy classes by algebraic varieties. Some specific examples are precisely described.

Our approach uses the modern viewpoint of Mori’s theory and Sarkisov’s program, aiming a generalization in higher dimension (although we use in fact some tools specific to dimension 2).

Let us give an outline of the paper. In Section 2 we recall some definitions and state the main result (Theorems 1 and 2), which is the classification of maximal algebraic subgroup of the Cremona group, each group being described as a G -Mori fibration. We present these groups in Sections 3 and 4. We then prove (Section 5) that any algebraic subgroup is contained in one of the groups of the classification, and then that any group of the classification is a minimal G -fibration (Section 6), that is furthermore birationally superrigid (Section 7). The proof of the theorems (Section 8) follows directly from these three observations. We finish the paper (Section 9) with a precise description of a family of maximal algebraic subgroups (the only one which is not directly explicit in Theorems 1 and 2) and a special example (Section 10) that illustrates some particularities of the classification.

Acknowledgements. The author would like to express his sincere gratitude to Michel Brion who asked him the question, and thanks him especially for interesting discussions on this subject. Thanks also to the referees for their helpful remarks and corrections.

1. Introduction

Si X est une variété algébrique complexe, on note $\text{Bir}(X)$ le groupe de ses transformations birationnelles (applications birationnelles de X vers lui-même). On dit qu’un sous-groupe $G \subset \text{Bir}(X)$ est *algébrique* s’il dispose d’une structure de groupe algébrique qui rend rationnelle l’action $t : G \times X \dashrightarrow X$ induite par l’inclusion de G dans $\text{Bir}(X)$. Le lecteur remarquera que t satisfait naturellement les axiomes classiques d’actions rationnelles de groupes algébriques (en particulier que t est définie en $e \times X$); on peut également vérifier qu’un sous-groupe fini de $\text{Bir}(X)$ est algébrique.

Le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^1) = \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est un groupe algébrique bien connu, isomorphe à $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Lorsque $n \geq 2$, le groupe $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ n’est pas algébrique, ce qui rend sa structure plus difficile d’accès.

L’étude des sous-groupes algébriques de $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ est un sujet abordé par un

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

grand nombre de mathématiciens depuis déjà bien longtemps. Lorsque $n = 2$, citons la classification complète des sous-groupes algébriques connexes maximaux de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ établie par F. Enriques [E1893], où l’auteur démontre que tout sous-groupe algébrique connexe maximal de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ est le conjugué de la composante connexe de l’identité du groupe des automorphismes d’une surface rationnelle minimale. Une preuve moderne se trouve dans [Um82b]. Lorsque $n = 3$, la classification des sous-groupes algébriques connexes maximaux est due à F. Enriques et G. Fano ; une preuve moderne se trouve dans [Ume80], [Ume82], [Um82b], et [Ume85] (les résultats sont aussi expliqués dans [Oda88]). Rappelons également l’étude des sous-groupes algébriques connexes maximaux de $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ qui contiennent un tore de dimension n effectuée par M. Demazure [Dem70].

Dans le cas non connexe, peu de résultats sont connus, même en dimension 2. On dispose de nombreuses études dans le cas de groupes finis (voir [K1895], [W1896], [BB00], [dFe04], [BB04], [Bea07], le résumé [Isk05] et ses références, ainsi que plus récemment [DI07], [Bla07] [Bla07b], [Bla07c]), mais ces travaux ne permettent pas de déterminer quels groupes finis représentent des groupes algébriques maximaux. Il reste aussi quelques points non établis dans la classification des groupes finis (voir la section “What is left?” de [DI07]), comme la paramétrisation des classes de conjugaison et la description précise des groupes d’automorphismes de fibrés en coniques.

Cet article propose une étude, à l’aide d’outils récents, des sous-groupes algébriques de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$. Nous prouvons que tout sous-groupe algébrique de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ est contenu dans un sous-groupe algébrique maximal et donnons une classification complète et des sous-groupes algébriques maximaux, ainsi qu’une paramétrisation de leurs classes de conjugaison par des variétés algébriques. Quelques exemples caractéristiques sont précisément décrits.

Notre approche utilise le point de vue moderne de la théorie de Mori et du programme de Sarkisov, en espérant une approche similaire en dimension supérieure (tout en utilisant en réalité quelques subtilités propres à la dimension 2).

Cet article se présente de la manière suivante. A la section 2, nous rappelons quelques définitions et énonçons le résultat principal (théorèmes 1 et 2), à savoir la classification des sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona, chaque groupe étant décrit en termes de G -fibration de Mori. Nous présentons ces groupes dans les sections 3 et 4. Nous démontrons ensuite (section 5) que tout groupe algébrique est contenu dans un des groupes de la classification, puis que chaque groupe de cette classification donne une G -fibration minimale (section 6), qui est de plus birationnellement superrigide (section 7). La démonstration des théorèmes (section 8) découle alors de ces trois observations. Nous terminons cet article (section 9) avec une description précise d’une famille de sous-groupes algébriques maximaux (la seule qui n’est pas directement explicité par les théorèmes 1 et 2) et un exemple spécial (section 10), qui illustre certaines particularités de la classification.

Remerciements. L’auteur tient à remercier chaleureusement Michel Brion de lui avoir posé cette question et surtout de lui avoir fait profiter de discussions très intéressantes sur ce sujet. Merci aussi aux rapporteurs pour leurs précieuses remarques et corrections.

2. Résultats

2.1. Actions birégulières sur des variétés

Rappelons que si $G \subset \text{Bir}(\mathbb{P}^n)$ est un sous-groupe algébrique, alors il existe une application birationnelle de \mathbb{P}^n vers une variété rationnelle X qui conjugue G à un sous-groupe de $\text{Aut}(X)$ (démontré par [Wei55] pour le cas connexe, étendu par [Ros56] au cas non connexe, voir aussi [PV89]). En passant à une complétion équivariante (à l'aide de [Sum74]), on peut supposer que X est projective; on choisira ensuite X lisse à l'aide d'une résolution équivariante des singularités. Le groupe G agit alors sur X mais également sur $\text{Pic}(X)$; on note $\text{Pic}(X)^G$ la partie du groupe de Picard qui est fixée par G . En utilisant un programme de Mori G -équivariant, on veut réduire le rang de $\text{Pic}(X)^G$ et obtenir une G -fibration de Mori (voir [KM98, Example 2.18]), au sens de la définition suivante :

Définition 2.1.1. Soit X une variété projective lisse et G un sous-groupe de $\text{Aut}(X)$. Une application birationnelle $\varphi : X \dashrightarrow Y$ est G -équivariante si $\varphi G \varphi^{-1} \subset \text{Aut}(Y)$.

Une G -fibration de Mori est une fibration $\pi : X \rightarrow Y$, où X et Y sont des variétés projectives \mathbb{Q} -factorielles à singularités terminales, Y est normale, $G \subset \text{Aut}(X)$ préserve la fibration, $\dim Y < \dim X$, $\text{rk Pic}(X)^G - \text{rk Pic}(Y)^G = 1$ et $-K_X \cdot C \geq 0$ pour toute courbe $C \subset X$, invariante par G et contractée par π .

Une G -fibration de Mori $\pi : X \rightarrow Y$ est *birationnellement superrigide* si toute application birationnelle G -équivariante $\varphi : X \dashrightarrow X'$ vers une G -fibration de Mori $\pi' : X' \rightarrow Y'$ est un isomorphisme, induisant de plus un isomorphisme $Y \rightarrow Y'$.

En dimension 2 (le cas que nous traiterons ici), la définition implique que X est une surface projective lisse et Y est soit un point, soit isomorphe à \mathbb{P}^1 . On verra de plus (proposition 2.2.5) que dans le premier cas X est de del Pezzo et dans le deuxième cas, le morphisme $X \rightarrow Y$ est une fibration en coniques.

2.2. Le programme minimal en dimension 2

En dimension 2, le programme minimal G -équivariant a été établi par Yu. Manin [Man67] (cas abélien) et ensuite par V. Iskovskikh [Isk79] (cas général). Les preuves se font à l'aide de couples (G, S) où S est une surface projective lisse et G est un groupe agissant fidèlement sur la surface; ces couples sont également appelés également G -surfaces. Deux cas sont traités de la même manière (voir l'introduction de [Man67]), à savoir lorsque G est un sous-groupe fini de $\text{Aut}(S)$ ou lorsque G est un groupe de Galois. Dans ce dernier cas, le groupe est infini, mais l'action sur le groupe de Picard étant finie, les preuves sont similaires. On peut de la même manière étendre ces résultats au cas où G est un sous-groupe algébrique de $\text{Aut}(S)$, l'action sur le groupe de Picard étant également finie.

Nous formaliserons ceci avec la proposition 2.2.5 ci-dessous, énoncée après quelques conventions et définitions que nous utiliserons tout au long de l'article.

Convention 2.2.1. On note $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, appelé également *groupe de Cremona*. Dans la suite, toutes les surfaces seront supposées *projectives, lisses et rationnelles*. Lorsque nous dirons qu'une transformation birationnelle *fixe une courbe*, c'est que sa restriction à la

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

courbe est l'identité ; si elle envoie juste la courbe birationnellement sur elle-même, nous dirons qu'elle *laisse la courbe invariante* ou qu'elle *la préserve*.

Définition 2.2.2. Si $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme, on note $\text{Aut}(X, \pi) \subset \text{Aut}(X)$ le groupe des automorphismes qui préservent la fibration, i.e. qui agissent sur l'ensemble des fibres de π , et $\text{Aut}(X/Y) \subset \text{Aut}(X, \pi)$ le noyau de cette action.

Définition 2.2.3. Un couple (G, S) est la donnée d'une surface S et d'un groupe G , sous-groupe algébrique de $\text{Aut}(S)$.

On dit que le couple (G, S) est *minimal* si tout morphisme birationnel G -équivariant $\varphi : S \rightarrow S'$, où S' est une surface, est un isomorphisme.

Définition 2.2.4. On dit qu'un morphisme $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un *fibré en coniques* si les fibres générales de π sont isomorphes à \mathbb{P}^1 , et s'il existe un nombre fini de fibres singulières, chacune étant l'union transverse de deux courbes isomorphes à \mathbb{P}^1 .

Proposition 2.2.5. *Soit (G, S) un couple minimal. Alors, il existe un morphisme $\pi : S \rightarrow Y$ qui soit une G -fibration de Mori (au sens de la définition 2.1.1).*

De plus un morphisme G -équivariant $\pi : S \rightarrow Y$ est une G -fibration de Mori, si et seulement si l'un des deux cas suivants se présente :

- (1) *Y est un point, $\text{Pic}(S)^G \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}K_S$ et S est une surface de del Pezzo.*
- (2) *$Y \cong \mathbb{P}^1$, π est une fibration en coniques et $\text{Pic}(S)^G \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}K_S \oplus \mathbb{Q}f$, où f est la classe de la fibre générale de π . \square*

Comme cela fut observé précédemment, cette proposition suit de [Man67] et [Isk79]. Depuis, avec les travaux de Mori [Mor82] et de ses successeurs sur le programme minimal, on peut trouver plusieurs démonstrations ou énoncés plus récents, comme par exemple [KM98, Exemple 2.18].

Rappelons que si X est une variété projective, le noyau K de l'application $\text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(\text{Pic}(X))$ est un sous-groupe algébrique linéaire (se voit à l'aide d'un plongement de X dans un espace projectif). Un groupe G tel que $K \subset G \subset \text{Aut}(X)$ est donc un sous-groupe algébrique si et seulement si son action sur $\text{Pic}(X)$ est finie. Ceci nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.2.6. *Si S est une surface de del Pezzo, le groupe $\text{Aut}(S)$ est un sous-groupe algébrique du groupe de Cremona.*

Si $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un fibré en coniques, alors le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ est un sous-groupe algébrique du groupe de Cremona.

Démonstration. Le premier cas se voit à l'aide du plongement induit par un multiple de l'anti-canonique, qui montre que le groupe $\text{Aut}(S)$ est un sous-groupe algébrique linéaire ; la finitude de l'action sur $\text{Pic}(S)$ est également prouvée dans [Dol83]. Dans le deuxième cas, la finitude de cette action suit du fait que $\text{Pic}(S)$ est engendré par les composantes de chaque fibre singulière (qui sont en nombre fini) et par K_S . \square

Afin de classifier les sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona, nous devons donc déterminer quelles surfaces de del Pezzo et quels fibrés en coniques donnent lieu à des groupes algébriques maximaux. Nous verrons que ces groupes doivent agir minimalement sur la surface.

Parmi les fibrés en coniques, beaucoup ont des groupes d'automorphismes qui agissent minimalement sur la surface, mais qui ne représentent pas des groupes algébriques maximaux. Les fibrés en coniques représentant des groupes algébriques maximaux se divisent en fait en trois familles ; nous énumérons celles-ci maintenant, avant de donner la classification des sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona.

2.3. Surfaces de Hirzebruch

Si $n \geq 1$, le groupe $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ préserve une unique fibration en coniques (qui est en fait une fibration en droites) sur la surface \mathbb{F}_n .

2.4. Fibrés exceptionnels

On dit qu'un fibré en coniques $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ est *exceptionnel* s'il est singulier au-dessus de $2n$ points ($n \geq 1$) et qu'il existe deux sections d'auto-intersection $-n$ (cette notion a déjà été introduite dans [DI07]). Nous verrons (corollaire 4.3.2) que la classe d'isomorphisme de (S, π) est uniquement déterminée par la classe des points à fibre singulière, à action de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ près.

2.5. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques

On dit qu'un fibré en coniques $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques si le groupe $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et si chacune des trois involutions de ce groupe fixe (point par point) une courbe irréductible, revêtement double de \mathbb{P}^1 via π , ramifiée au-dessus d'un nombre positif (pair) de points.

Définition 2.5.1. Un *triplet de ramification* est un triplet $\{A_1, A_2, A_3\}$, tel que A_i est un ensemble de $2a_i \geq 2$ points de \mathbb{P}^1 pour $i = 1, 2, 3$, et tel que tout point de \mathbb{P}^1 appartient à 0 ou 2 ensembles du triplet.

Nous verrons (proposition 4.4.6) que l'application qui associe à un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques le triplet formé des trois ensembles de points de ramification des trois courbes fixées par les involutions de $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ est une bijection entre les classes d'isomorphisme de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques et les triplets de ramification, à action de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ près. Nous démontrerons aussi que $\text{Aut}(S, \pi)$ est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona si et seulement si la surface S n'est pas une surface de del Pezzo (ce qui est le cas notamment dès que le nombre de points de ramification est assez grand). Mentionnons qu'en général, $\text{Aut}(S, \pi) \neq \text{Aut}(S)$ et que ce dernier groupe n'est pas toujours un groupe algébrique (section 10).

2.6. La classification

Nous pouvons maintenant énoncer la classification des sous-groupes algébriques du groupe de Cremona, qui a été annoncée précédemment et qui sera démontrée à la section 8.

Théorème 1. *Tout sous-groupe algébrique du groupe de Cremona est contenu dans un sous-groupe algébrique maximal.*

Les sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona sont les conjugués des groupes $G = \text{Aut}(S, \pi)$ où S est une surface rationnelle et $\pi : S \rightarrow Y$ un morphisme, tels que (S, π) soit dans l'un des cas suivants :

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

- (1) Y est un point, $G = \text{Aut}(S)$ et S est une des surfaces de del Pezzo suivantes :
1. $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;
 2. une surface de del Pezzo de degré 1, 4, 5 ou 6 ;
 3. une surface de del Pezzo de degré 3 (respectivement 2) telle que le couple $(\text{Aut}(S), S)$ soit minimal (toujours vrai si le degré est 2) et telle que les points fixes de l'action de $\text{Aut}(S)$ sur S soient sur les courbes exceptionnelles ;
- (2) $Y \cong \mathbb{P}^1$ et π est une des fibrations en coniques suivantes :
1. la fibration en droites de la surface de Hirzebruch \mathbb{F}_n , pour $n \geq 2$;
 2. un fibré en coniques exceptionnel ayant au minimum 4 fibres singulières ;
 3. un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques, tel que S ne soit pas une surface de del Pezzo (ayant en particulier au moins 6 fibres singulières).

De plus, dans chacun des cas ci-dessus, le couple (G, S) est minimal et la fibration $\pi : S \rightarrow Y$ est une G -fibration de Mori birationnellement superrigide.

En particulier, deux tels groupes $G = \text{Aut}(S, \pi)$ et $G' = \text{Aut}(S', \pi')$ sont conjugués si et seulement s'il existe un isomorphisme $S \rightarrow S'$ qui envoie les fibres de π sur celles de π' .

Décrivons maintenant plus précisément la structure de ces groupes algébriques maximaux et énonçons aussi que les classes de conjugaison des groupes sont paramétrées par des variétés algébriques.

Théorème 2. *Les sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona appartiennent — à conjugaison près — à l'une des onze familles suivantes :*

- (1) $\text{Aut}(\mathbb{P}^2) \cong \text{PGL}(3, \mathbb{C})$.
- (2) $\text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cong (\text{PGL}(2, \mathbb{C}))^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (3) $\text{Aut}(S_6) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \rtimes (\text{Sym}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où S_6 est la surface de del Pezzo de degré 6.
- (4) $\text{Aut}(\mathbb{F}_n) \cong \mathbb{C}^{n+1} \rtimes \text{GL}(2, \mathbb{C})/\mu_n$, où \mathbb{F}_n est la n -ième surface de Hirzebruch et μ_n est la n -torsion du centre de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$, avec $n \geq 2$.
- (5) $\text{Aut}(S, \pi)$ où (S, π) est un fibré en coniques exceptionnel, ayant des fibres singulières au-dessus d'un ensemble $\Delta \subset \mathbb{P}^1$ de $2n$ points distincts, $n \geq 2$. La projection de $\text{Aut}(S, \pi)$ sur $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ donne une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(S, \pi) \rightarrow H_\Delta \rightarrow 1,$$

où H_Δ est le sous-groupe fini de $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) = \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ constitué des éléments qui laissent l'ensemble Δ invariant.

- (6) $\text{Aut}(S_5) \cong \text{Sym}_5$ où S_5 est la surface de del Pezzo de degré 5.
- (7) $\text{Aut}(S) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes H_S$ où S est n'importe quelle surface de del Pezzo de degré 4, obtenue en éclatant 5 points de \mathbb{P}^2 , et H_S est le groupe des automorphismes de \mathbb{P}^2 qui laissent l'ensemble des points éclatés invariant.
- (8) $\text{Aut}(S)$ où S est une surface de del Pezzo de degré 3 (cubique lisse), de la forme suivante :

JÉRÉMY BLANC

1. le revêtement triple de \mathbb{P}^2 , ramifié le long d'une cubique lisse Γ . Si S est la cubique de Fermat alors $\text{Aut}(S) = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \text{Sym}_4$; sinon on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(S) \rightarrow H_\Gamma \rightarrow 1,$$

où H_Γ est le groupe des automorphismes de \mathbb{P}^2 qui laissent la cubique invariante; H_Γ contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$;

2. la surface cubique de Clebsch¹, d'équation $WX^2 + XY^2 + YZ^2 + Z^2Y = 0$ et de groupe d'automorphismes isomorphe à Sym_5 ;
3. une surface cubique d'équation $W^3 + W(X^2 + Y^2 + Z^2) + \lambda XYZ = 0$, pour un $\lambda \in \mathbb{C}$, $9\lambda^3 \neq 8\lambda$, $8\lambda^3 \neq -1$, dont le groupe d'isomorphisme est isomorphe à Sym_4 .
- (9) $\text{Aut}(S) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes H_S$ où S est une surface de del Pezzo de degré 2, revêtement double d'une quartique lisse $Q_S \subset \mathbb{P}^2$ telle que $H_S = \text{Aut}(Q_S)$ agit sans point fixe sur la quartique privée de ses points de bitangence.
- (10) $\text{Aut}(S)$ où S est n'importe quelle surface de del Pezzo de degré 1, revêtement double d'un cône quadratique Q , ramifié le long d'une courbe Γ_S de degré 6, intersection complète de Q avec une surface cubique de \mathbb{P}^3 . On a une suite exacte (en général non scindée)

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(S) \rightarrow H_S \rightarrow 1,$$

où H_S est le groupe des automorphismes de Q qui laissent la courbe Γ_S invariant.

- (11) $\text{Aut}(S, \pi)$ où (S, π) est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques, tel que S ne soit pas une surface de del Pezzo.

La projection de $\text{Aut}(S, \pi)$ sur $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ donne une suite exacte

$$1 \rightarrow V \rightarrow \text{Aut}(S, \pi) \rightarrow H_V \rightarrow 1,$$

où $V \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ contient trois involutions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ fixant chacune une courbe hyperreliptique, ramifiée au-dessus des points de $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{P}^1$ et $H_V \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est le sous-groupe fini qui laisse l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3\}$ invariant.

Les onze familles sont disjointes et les classes de conjugaison au sein de chaque famille sont paramétrées respectivement par :

- (1–3) Le point.
- (4) Il n'y a qu'une classe de conjugaison pour chaque entier $n \geq 2$.
- (5) Pour chaque entier $n \geq 2$, les ensembles de $2n$ points de \mathbb{P}^1 , modulo l'action de $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) = \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$.
- (6) Le point.
- (7) Les classes d'isomorphisme de surfaces de del Pezzo de degré 4.
- (8) Les classes d'isomorphisme des surfaces cubiques en question, données respectivement

¹En choisissant $F = \zeta^3 W + X + \zeta Y + \zeta^4 Z$, où ζ est une racine 5-ième de l'unité et $\sigma = (W, X, Y, Z) \mapsto (X, Y, Z, W)$, le morphisme $(W : X : Y : Z) \mapsto (F : F\sigma : F\sigma^2 : F\sigma^3 : -\sum_{i=0}^3 F\sigma^i)$ induit un isomorphisme entre la surface cubique d'équation $WX^2 + XY^2 + YZ^2 + Z^2Y = 0$ dans \mathbb{P}^3 avec la surface cubique "diagonale" de Clebsch d'équation $\sum X_i = \sum (X_i)^3 = 0$ dans \mathbb{P}^4 .

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

1. *par les classes d'isomorphisme des courbes elliptiques ;*
 2. *pour la surface de Clebsch, il n'y a qu'une classe d'isomorphisme ;*
 3. *par les classes de $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid 9\lambda^3 \neq 8\lambda, 8\lambda^3 \neq -1\}$ modulo l'équivalence $\lambda \sim -\lambda$.*
- (9) *Les classes d'isomorphisme des quartiques lisses de \mathbb{P}^2 ayant des groupes d'automorphismes agissant sans point fixe sur la quartique privée de ses points de bitangence.*
- (10) *Les classes d'isomorphisme de surfaces de del Pezzo de degré 1.*
- (11) *Les triplets de ramification $\{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathbb{P}^1$ déterminant des $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques sur des surfaces qui ne sont pas de del Pezzo, modulo l'action de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$.*

Nous décrivons plus précisément le cas des surfaces de del Pezzo de degré 2, où toutes les surfaces ne donnent pas forcément des groupes algébriques maximaux, au lemme 3.6.1. De même, les $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques donnant lieu à des groupes algébriques maximaux si et seulement si la surface n'est pas de del Pezzo, ces cas sont déterminés à la section 9.

3. Automorphismes de surfaces de del Pezzo

3.1. Généralités

Rappelons qu'une surface de del Pezzo est isomorphe à \mathbb{P}^2 , $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ou à l'éclatement d'un ensemble Δ de r points dans le plan, avec $1 \leq r \leq 8$ et tels que la surface ne contiennent pas de courbe d'auto-intersection ≤ -2 . Ceci est équivalent à ce qu'il n'existe pas de droite passant par 3 points de Δ , ni de conique passant par 6 points de Δ , ni de cubique passant par 8 points de Δ et étant singulière en l'un des points. Par la suite, nous dirons simplement que les points sont en position générale.

Pour toute surface S de del Pezzo, le groupe $\text{Aut}(S)$ est un groupe algébrique (proposition 2.2.6). Nous démontrerons plus tard que $\text{Aut}(S)$ est un sous-groupe maximal du groupe de Cremona si et seulement si le couple $(\text{Aut}(S), S)$ est minimal et que l'action de $\text{Aut}(S)$ sur S privé de ses courbes exceptionnelles a des orbites qui ont toutes une taille au moins égale à $(K_S)^2$; ces deux conditions étant toujours vérifiées pour $(K_S)^2 \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$.

Le degré d'une surface de del Pezzo est le carré de son diviseur canonique. Rappelons qu'il existe une unique classe d'isomorphismes de surfaces de del Pezzo de degré d , pour $d = 5, 6, 7, 9$, deux classes d'isomorphisme pour $d = 8$ (les surfaces de Hirzebruch $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et \mathbb{F}_1) et une infinité de classes d'isomorphisme pour $d = 1, 2, 3, 4$.

Les groupes d'automorphismes de \mathbb{P}^2 et $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sont très connus ; il s'agit des groupes algébriques $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ et $(\text{PGL}(2, \mathbb{C}) \times \text{PGL}(2, \mathbb{C})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est assez naturel que ceux-ci soient maximaux ; nous démontrerons ceci plus tard (section 8). Dans la suite de cette section, Δ sera un ensemble de r points en position générale, avec $1 \leq r \leq 8$, et S_Δ sera la surface de del Pezzo obtenue en éclatant r points en position générale de \mathbb{P}^2 . Si $r = 1, 2$, le couple $(\text{Aut}(S_\Delta), S_\Delta)$ n'est pas minimal et le groupe $\text{Aut}(S_\Delta)$ est conjugué à un sous-groupe de respectivement

$\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ et $\text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$. Si $r = 3, 4$ nous noterons $S_\Delta = S_{9-r}$ vu que la surface ne dépend pas de l'ensemble des points éclatés mais uniquement du degré, égal à $9 - r$.

Les groupes d'automorphismes des surfaces de del Pezzo ont été décrits à de nombreuses reprises depuis le XIX^e siècle dans de nombreux articles, avec des listes plus ou moins précises. Citons en particulier les travaux classiques de [K1895], [W1896] et [Seg42], ainsi que le travail récent [DI07], où le lecteur trouvera d'autres références sur le sujet.

3.2. La surface de del Pezzo de degré 6

La surface S_6 peut être vue comme

$$S_6 = \{((x : y : z), (a : b : c)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \mid ax = by = cz\},$$

et l'éclatement $S_6 \rightarrow \mathbb{P}^2$ est donné par la première projection. Le groupe $\text{Aut}(S_6)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^2 \rtimes (\text{Sym}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où les facteurs de ce groupe sont donnés respectivement par l'action diagonale sur les coordonnées, les permutations simultanées des coordonnées de chaque facteur et la permutation des deux facteurs.

Il y a 6 courbes exceptionnelles sur S_6 , correspondant aux courbes exceptionnelles des 3 points éclatés et des 3 droites passant par deux des points. Ces courbes forment un hexagone et la projection de $\text{Aut}(S_6)$ sur $\text{Sym}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donne l'action sur l'hexagone. Il y a 3 fibrations en coniques sur la surface, et la projection de $\text{Aut}(S_6)$ sur Sym_3 donne l'action sur l'ensemble des trois fibrations.

3.3. La surface de del Pezzo de degré 5

La surface S_5 contient 10 courbes exceptionnelles, correspondant aux courbes exceptionnelles des 4 points éclatés et aux 6 droites passant par deux des points. Il y a 5 ensembles de 4 courbes exceptionnelles disjointes. Le groupe $\text{Aut}(S_5)$ agit sur celles-ci et est, via cet action, isomorphe au groupe symétrique Sym_5 . Ce groupe est en fait engendré par le groupe Sym_4 correspondant aux automorphismes de \mathbb{P}^2 qui laissent Δ invariant et par une involution quadratique ayant comme points-bases 3 des 4 points de Δ et fixant le quatrième.

3.4. Les surfaces de del Pezzo de degré 4

Supposons que $r = 5$. La surface S_Δ est isomorphe à la sous-variété de \mathbb{P}^4 , donnée par les équations

$$\sum_{i=0}^4 x_i^2 = \sum_{i=0}^4 \lambda_i x_i^2 = 0,$$

pour des λ_i tous différents (voir, par exemple, [DI07, Lemme 6.5]). La 2-torsion du sous-groupe diagonal de $\text{Aut}(\mathbb{P}^4) = \text{PGL}(5, \mathbb{C})$ — que nous noterons $T \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ — agit sur S_Δ et est engendrée par cinq involutions fixant chacune une courbe elliptique — trace de l'équation $x_i = 0$ sur S_Δ pour $i = 0, \dots, 4$. Il existe 10 fibrations en coniques sur la surface S_Δ , réunies en 5 couples. Chaque couple correspond au pinceau des droites par un des points de Δ et au pinceau des coniques passant par les 4 autres points. Le groupe $\text{Aut}(S_\Delta)$ agit sur ces 5 couples et cette action donne une suite exacte (voir [Bla07c])

$$1 \rightarrow T \rightarrow \text{Aut}(S) \rightarrow H_\Delta \rightarrow 1,$$

où H_Δ correspond au groupe des automorphismes de \mathbb{P}^2 qui laissent l'ensemble Δ invariant. Il existe donc une section à cette suite exacte et $\text{Aut}(S) = T \rtimes H_\Delta$. Remarquons qu'en général H_Δ est trivial et que sinon, il peut être isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ou au groupe diédral à 6 ou 10 éléments.

3.5. Les surfaces de del Pezzo de degré 3

Pour $r = 6$, l'ensemble des surfaces S_Δ forme la famille des surfaces de del Pezzo qui est probablement la plus connue, puisqu'il s'agit en fait des surfaces cubiques lisses de \mathbb{P}^3 . Les groupes des automorphismes de telles surfaces ont été classifiés par Kantor et Wiman, puis corrigés respectivement par Segre [Seg42] et Hosoh [Hos97]; le lecteur trouvera un historique dans [DI07]. Une surface cubique générale n'ayant pas d'automorphismes, les couples $(\text{Aut}(S_\Delta), S_\Delta)$ qui représentent des groupes algébriques maximaux correspondent à une des familles bien particulières de surfaces cubiques.

Proposition 3.5.1. *Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ une cubique lisse et soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration en coniques. Alors, le couple $(\text{Aut}(S, \pi), S)$ n'est pas minimal. En particulier, si $G \subset \text{Aut}(S)$, le couple (G, S) est minimal si et seulement si $\text{rk Pic}(S)^G = 1$.*

Démonstration. Une fibre générale de π est une conique plane de \mathbb{P}^3 , la droite résiduelle dans le plan associé est invariant par $\text{Aut}(S, \pi)$ et peut être contractée de manière $\text{Aut}(S, \pi)$ -équivariante; la paire $(\text{Aut}(S, \pi), S)$ n'est donc pas minimale. La dernière assertion suit de la proposition 2.2.5. \square

A l'aide de cette proposition, on peut déterminer parmi les groupes d'automorphismes de surfaces cubiques ceux qui donnent des couples minimaux en déterminant leur action sur le groupe de Picard. Ceci se calcule en utilisant la formule de Lefschetz, la représentation des éléments comme éléments du groupe de Weyl, ou directement en trouvant des courbes invariantes. Nous préférons omettre une telle recherche, longue et fastidieuse, qui peut se retrouver dans [DI07]. Le résultat suivant en découle :

Proposition 3.5.2. *Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface cubique lisse. Alors le couple $(\text{Aut}(S), S)$ est minimal si et seulement si S est isomorphe à une cubique dont l'équation est l'une des suivantes :*

- (1) $W^3 + X^3 + Y^3 + Z^3 + \alpha XYZ = 0$;
- (2) $W^2X + X^2Y + Y^2Z + Z^2W = 0$;
- (3) $W^3 + W(X^2 + Y^2 + Z^2) + \beta XYZ = 0$;
- (4) $W^3 + X^3 + \gamma WX(Y + \delta Z) + Y^3 + Z^3 = 0$;

pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, avec $9\beta^3 \neq 8\beta$, $8\beta^3 \neq -1$. Dans le cas (2), $\text{Aut}(S) \cong \text{Sym}_5$ et dans le cas (3), $\text{Aut}(S) \cong \text{Sym}_4$. \square

Nous démontrerons (à la section 8) qu'un tel groupe est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona si et seulement si chacun de ses points fixes sur S appartient à une courbe exceptionnelle. Le lemme suivant décrit ces cas.

Lemme 3.5.3. *Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface cubique lisse, telle que le couple $(\text{Aut}(S), S)$ soit minimal.*

Si S est isomorphe à une surface dont l'équation est l'une des trois premières de la proposition 3.5.2, alors les orbites du groupe $\text{Aut}(S)$ sur S ont au minimum 3 points distincts.

Sinon, le groupe $\text{Aut}(S)$ fixe un point de S qui n'appartient à aucune courbe exceptionnelle.

Démonstration. D'après la proposition 3.5.2, l'équation de la surface est — à isomorphisme près — de l'une des quatre formes citées dans la proposition 3.5.2. Notons $\omega = e^{2i\pi/3}$, une racine cubique de l'unité et examinons chacune des 4 possibilités.

Dans le premier cas, l'automorphisme $W \mapsto \omega W$ a des orbites de taille 3, sauf sur la courbe elliptique plane $W = X^3 + Y^3 + Z^3 + \lambda XYZ = 0$. L'automorphisme $(W : X : Y : Z) \mapsto (W : X : \omega Y : \omega^2 Z)$ agit sans point fixe sur cette courbe elliptique, ce qui implique le résultat. Dans le deuxième cas, l'automorphisme $(W : X : Y : Z) \mapsto (W : \zeta X : \zeta^{-1} Y : \zeta^3 Z)$, où ζ est une racine 5-ième de l'unité, agit sur la surface et fixe 4 points. Ceux-ci étant permutés transitivement par l'automorphisme $(W : X : Y : Z) \mapsto (X : Y : Z : W)$, toutes les orbites ont une taille au moins égale à 4. Dans le troisième cas, observons tout d'abord que $\beta \neq 0$ (car la surface est lisse et donc irréductible). Les points de S fixés par l'automorphisme $(W : X : Y : Z) \mapsto (W : Y : Z : X)$ sont de la forme $(u : v : v : v)$ pour $u, v \in \mathbb{C}^*$. Or, le groupe engendré par $(W : X : Y : Z) \mapsto (W : X : -Y : -Z)$ et $(W : X : Y : Z) \mapsto (W : -X : -Y : Z)$ envoie chacun de ces points sur 3 autres points différents.

Dans le dernier cas, le groupe $\text{Aut}(S)$ contient le groupe H isomorphe à Sym_3 , engendré par $(W : X : Y : Z) \mapsto (\omega W : \omega^2 X : Y : Z)$ et $(W : X : Y : Z) \mapsto (X : W : Y : Z)$. Suivant les valeurs de μ et λ , on a trois possibilités (voir [DI07] ou [Seg42]) : ou bien $\text{Aut}(S) = H$ (qui est le cas général), ou bien $\mu^3 = 1$ et $\text{Aut}(S)$ est engendré par H et $(W : X : Y : Z) \mapsto (W : X : \mu Z : \mu^2 Y)$, ou bien λ et μ sont tels que S est isomorphe à l'une des surfaces précédentes (notamment lorsque $\lambda = 0$). On peut supposer que l'on est dans l'un des deux premiers cas ; les points $(0 : 0 : 1 : -\omega^i)$ pour $i = 0, 1, 2$ sont alors fixés par $\text{Aut}(S)$. On vérifie par un calcul direct qu'au moins un des trois points n'appartient à aucune des 27 droites de la surface. \square

3.6. Les surfaces de del Pezzo de degré 2

Lorsque $r = 7$, le morphisme anti-canonique donne un revêtement double $S_\Delta \rightarrow \mathbb{P}^2$, ramifié le long d'une quartique lisse (voir [Bea96]). Réciproquement, toute telle surface est une surface de del Pezzo de degré 2. L'involution liée au revêtement est appelée *involution de Geiser* et l'action sur la quartique donne lieu à la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(S_\Delta) \rightarrow H_{S_\Delta} \rightarrow 1,$$

où H_{S_Δ} est le groupe des automorphismes de \mathbb{P}^2 qui laissent la quartique invariante, ou de manière équivalente le groupe des automorphismes de la quartique. On peut de plus observer que cette suite exacte est scindée et donc que $\text{Aut}(S_\Delta) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H_{S_\Delta}$.

L'involution de Geiser fixant une courbe de genre 3, elle n'agit birégulièrement sur aucune surface de del Pezzo de degré ≥ 3 . Le couple $(\text{Aut}(S_\Delta), S_\Delta)$ est donc

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

toujours minimale. Nous démontrerons (à la section 8) que $\text{Aut}(S_\Delta)$ est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona si et seulement si chacun de ses points fixes sur S_Δ appartient à une courbe exceptionnelle. Le lemme suivant décrit ces cas, reprenant la classification des automorphismes de surfaces de del Pezzo de degré 2 de [DI07], inspirée des résultats sur les quartiques lisses.

Lemme 3.6.1. *Soit S une surface de del Pezzo de degré 2, plongé dans $\mathbb{P}(2, 1, 1, 1)$ comme $W^2 = F(X, Y, Z)$, où F est l'équation d'une quartique lisse. Si les points-fixes de l'action de $\text{Aut}(S)$ sur S sont sur les courbes exceptionnelles, alors S est isomorphe à l'une des surfaces suivantes (les notations pour la structure de $\text{Aut}(S)$ sont celles de [DI07], qui reprend celles de l'Atlas des groupes finis).*

	Ordre $ \text{Aut}(S) $	Structure de $\text{Aut}(S)$	Équation de la surface S	Restrictions paramètres
1	336	$2 \times L_2(7)$	$W^2 = X^3Y + Y^3Z + Z^3X$	
2	192	$2 \times (4^2 : S_3)$	$W^2 = X^4 + Y^4 + Z^4$	
3	96	$2 \times 4A_4$	$W^2 = X^4 + aX^2Y^2 + Y^4 + Z^4$	$a^2 = -12$
4	48	$2 \times S_4$	$W^2 = X^4 + Y^4 + Z^4 + a(X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2)$	$a \neq (-1 \pm \sqrt{-7})/2$
5	32	$2 \times AS_{16}$	$W^2 = X^4 + aX^2Y^2 + Y^4 + Z^4$	$a^2 \neq 0, -12$ $a^2 \neq 4, 36$
6	16	$2 \times D_8$	$W^2 = X^4 + Y^4 + Z^4 + aX^2Y^2 + bZ^2XY$	$a, b \neq 0$
7	12	$2 \times S_3$	$W^2 = Z^4 + aZ^2XY + Z(X^3 + Y^3) + bX^2Y^2$	
8	8	2^3	$W^2 = X^4 + Y^4 + Z^4 + aX^2Y^2 + bX^2Z^2 + cY^2Z^2$	$a, b, c \neq 0$ distincts

Démonstration. La classification des groupes d'automorphismes des surfaces de del Pezzo de degré 2, où de manière équivalente celles des quartiques lisses du plan, a été établie par Kantor et Wiman, puis revue et corrigée par I. Dolgachev [Dol04] et F. Bars [Bar06]; ceci est résumé dans [DI07]. Nous reprenons simplement cette dernière référence et enlevons les cas VI, VIII, XI, XII, XIII, qui ont des points-fixes qui n'appartiennent à aucune courbe exceptionnelle (rappelons que ces dernières correspondent aux bitangentes de la quartique). On vérifie à la main que les cas VII, IX et X de [DI07] (ici notés 6, 7 et 8) n'admettent aucun point fixe.

Le fait que les groupes 1 à 5 n'admettent aucun point fixe suit de l'observation suivante : si un sous-groupe fini $G \subset \text{PGL}(3, \mathbb{C}) = \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ préserve une courbe lisse et fixe un point P de la courbe, alors l'action sur l'espace tangent T_P donne une suite exacte $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$ où G et H sont cycliques. En effet le groupe H agit sur $\mathbb{P}(T_P) \cong \mathbb{P}^1$ avec un point fixe (correspondant à la tangente de la courbe) et donc est cyclique, car fini ; le groupe G' est cyclique car il s'identifie à un sous-groupe de \mathbb{C}^* agissant sur T_P par homothéties. \square

3.7. Les surfaces de del Pezzo de degré 1

Si $r = 8$, le morphisme donné par le double de l'anti-canonique donne un morphisme $S_\Delta \rightarrow \mathbb{P}^3$, dont l'image est un cône quadratique Q et tel que la restriction $S_\Delta \rightarrow$

Q est un revêtement double, ramifié le long d'une courbe lisse Γ_Δ , intersection complète de Q avec une surface de degré 3 (voir [Bea96]). On dispose à nouveau d'une suite exacte naturelle

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(S_\Delta) \rightarrow H_{S_\Delta} \rightarrow 1$$

où le noyau est engendré par la classique *involution de Bertini* et H_{S_Δ} est le groupe des automorphismes de Q qui préservent la courbe Γ_Δ ou de manière équivalente le groupe des automorphismes de Γ_Δ . Remarquons qu'en général la suite n'est pas scindée (on peut notamment trouver des racines carrées de l'involution de Bertini — voir [Bla07, Table I, classe [1.B2.2]] et [DI07, Table 8, Type XIX]).

Les groupes d'automorphismes de surfaces de del Pezzo de degré 1 ont été classifiés par Kantor et Wiman ; une approche moderne se trouve dans [DI07].

4. Groupes algébriques préservant une fibration rationnelle

4.1. Généralités

Une *pseudo-fibration rationnelle* est une application rationnelle $\pi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ dont la fibre générale est une courbe rationnelle. Si de plus π est un morphisme, alors nous dirons que c'est une *fibration rationnelle*. Si chaque fibre singulière est isomorphe à une réunion de deux courbes isomorphes à \mathbb{P}^1 se coupant transversalement en un point, alors π est une *fibration en coniques* et si de plus il n'existe pas de fibre singulière, alors π est une *fibration en droites*.

Un théorème de Noether–Enriques [Bea96, Théorème III.4] implique que pour toute pseudo-fibration rationnelle $\pi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ il existe une application birationnelle $S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ qui envoie les fibres générales de π sur les droites passant par un point ; où de manière équivalente qu'il existe une application birationnelle $S \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui envoie les fibres générales de π sur celles d'une des deux fibrations en droites de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Définition 4.1.1. Un fibré en coniques $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ se note également (S, π) .

Soient (S, π) et (S', π') deux fibrés en coniques. Une application birationnelle $\varphi : S \dashrightarrow S'$ est une *application birationnelle de fibrés en coniques* si et elle envoie une fibre générale de π sur une fibre générale de π' .

Rappelons que l'ensemble des automorphismes du fibré en coniques (S, π) est noté $\text{Aut}(S, \pi)$ et que ce dernier est un sous-groupe algébrique du groupe de Cremona (proposition 2.2.6).

Définition 4.1.2. On note **dJo** le *groupe de de Jonquières*, constitué des applications de la forme

$$(x, y) \dashrightarrow \left(\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{\alpha(x)y + \beta(x)}{\gamma(x) + \delta(x)} \right),$$

pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ et $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$. Ce groupe est naturellement isomorphe à $\text{PGL}(2, \mathbb{C}(x)) \rtimes \text{PGL}(2, \mathbb{C})$, où $\text{PGL}(2, \mathbb{C}) = \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ agit sur $\mathbb{C}(x) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ via l'action de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ sur \mathbb{P}^1 .

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

En appliquant à nouveau le théorème de Noether et Enriques, nous trouvons que pour toute fibration en coniques (S, π) , le groupe algébrique $\text{Aut}(S, \pi)$ est conjugué à un sous-groupe du *groupe de de Jonquières* **dJo**, introduit à la définition 4.1.2.

Réciproquement, si G est un sous-groupe algébrique du groupe de de Jonquières, alors G est conjugué à un sous-groupe algébrique de $\text{Aut}(S, \pi)$, pour un certain fibré en coniques (S, π) .

Lemme 4.1.3. *Soit (S, π) un fibré en coniques avec au moins une fibre exceptionnelle. Si $\text{Pic}(S)^{\text{Aut}(S, \pi)}$ est de rang 2, il est égal à $\mathbb{Z}K_S \oplus \mathbb{Z}f$, où f est le diviseur d'une fibre de π .*

Démonstration. Soit $C \in \text{Pic}(S)^{\text{Aut}(S, \pi)}$; le groupe $\text{Pic}(S)^{\text{Aut}(S, \pi)}$ étant de rang 2, écrivons $C = aK_S + bf$, pour $a, b \in \mathbb{Q}$. L'intersection de C avec une composante d'une fibre singulière valant $-a$, nous en déduisons que $a \in \mathbb{Z}$. Ceci montre que $aK_S \in \text{Pic}(S)$ et donc que $bf \in \text{Pic}(S)$, d'où la relation $b \in \mathbb{Z}$. \square

Nous présentons maintenant les sous-groupes algébriques du groupe de de Jonquières annoncés dans l'introduction. Nous démontrerons plus tard (proposition 5.2.3) que les sous-groupes algébriques maximaux de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ qui préservent une fibration rationnelle sont les conjugués de ces groupes.

4.2. Automorphismes des surfaces de Hirzebruch

Si $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une fibration en droites, alors S est isomorphe à une surface de Hirzebruch. On note \mathbb{F}_n la surface de Hirzebruch $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, pour $n \geq 0$.

La surface \mathbb{F}_0 est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et il existe deux fibrations en droites sur cette surface. Le groupe des automorphismes de \mathbb{F}_0 qui préservent une des deux fibrations (et donc l'autre) est isomorphe à $(\text{PGL}(2, \mathbb{C}))^2$. Ce groupe n'est pas maximal, vu qu'il est contenu dans le groupe $\text{Aut}(\mathbb{F}_0) \cong (\text{PGL}(2, \mathbb{C}))^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspond à la permutation des facteurs.

Si $n \geq 1$, alors il existe une unique fibration en coniques sur \mathbb{F}_n (qui est en fait une fibration en droites), et le groupe $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ préserve donc celle-ci. Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{C}^{n+1} \rtimes \text{GL}(2, \mathbb{C})/\mu_n$, où \mathbb{C}^{n+1} s'identifie à l'ensemble des polynômes homogènes de degré n en deux variables et où $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ agit naturellement sur les variables, avec comme noyau le sous-groupe μ_n des matrices égales à la matrice identité multipliée par une racine n -ième de l'unité. En coordonnées affines, l'isomorphisme associe à

$$\left(a_0Y^n + a_1XY^{n-1} + \dots + a_nX^n, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{C}^{n+1} \rtimes \text{GL}(2, \mathbb{C})$$

l'automorphisme

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{ax + b}{cx + d}, \frac{y + a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{(cx + d)^n} \right)$$

de la surface \mathbb{F}_n , vu comme élément du groupe de de Jonquières.

Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ est un sous-groupe algébrique connexe du groupe de Cremona. Si $n = 1$, alors ce groupe n'est pas maximal vu qu'il est conjugué à un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, via la contraction de la section exceptionnelle. Nous verrons (à la section 8) que pour $n \geq 2$, le groupe $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ est maximal.

4.3. Automorphismes de fibrés exceptionnels

Nous avons défini en section 2.4 ce qu'était un fibré exceptionnel. Nous rappelons brièvement quelques descriptions simples des fibrés exceptionnels (lemme 4.3.1) et de leurs automorphismes (lemme 4.3.3); la plupart de ces résultats se retrouvent également à partir de la partie 5.3 de [DI07].

Lemme 4.3.1. *Soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ un fibré en coniques avec $2n$ fibres singulières. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *le fibré est exceptionnel;*
- (2) *il existe exactement deux sections s_1, s_2 d'auto-intersection $-n$, qui sont disjointes; de plus chaque fibre exceptionnelle a une composante qui touche s_1 et l'autre qui touche s_2 ;*
- (3) *il existe un morphisme birationnel $\eta_n : S \rightarrow \mathbb{F}_n$ de fibrés en coniques qui est l'éclatement de $2n$ points, tous appartenant à une même section d'auto-intersection n ;*
- (4) *il existe un morphisme birationnel $\eta_0 : S \rightarrow \mathbb{F}_0$ de fibrés en coniques qui est l'éclatement de $2n$ points, dont n sont sur une section d'auto-intersection 0 et les n autres sur une autre section d'auto-intersection 0 .*

Démonstration. Supposons que le fibré est exceptionnel et notons s_1 une des sections d'auto-intersection $-n$ et s_2 l'autre. En contractant dans chaque fibre exceptionnelle la composante qui ne touche pas s_1 nous obtenons le morphisme η_n . Ceci démontre en particulier l'assertion (2) et l'assertion (3). En contractant n composantes qui touchent s_1 et n composantes qui touchent s_2 , nous trouvons le morphisme η_0 (et donc l'assertion (4)). La démonstration se termine en vérifiant que chacune des assertions (2), (3), (4) implique directement que le fibré est exceptionnel. \square

Corollaire 4.3.2. *Deux fibrés en coniques exceptionnels sont isomorphes si et seulement les points de \mathbb{P}^1 sur lesquels ils sont singuliers sont les mêmes, à automorphisme de \mathbb{P}^1 près.*

Démonstration. Il s'agit de montrer qu'un automorphisme de \mathbb{P}^1 se relève à un automorphisme de fibrés en coniques. Utilisons le morphisme η_n du lemme 4.3.1. Un automorphisme de \mathbb{P}^1 peut être vu comme un automorphisme de la section de \mathbb{F}_n d'auto-intersection n et s'étend à un automorphisme de \mathbb{F}_n , qui se relève, via η_n à un automorphisme du fibré en coniques. \square

Le lemme suivant est une conséquence de [DI07, Prop. 5.3].

Lemme 4.3.3. *Soit (S, π) un fibré en coniques exceptionnel et notons $\Delta \subset \mathbb{P}^1$ l'ensemble des points qui ont une fibre singulière. Alors, les assertions suivantes sont satisfaites :*

- (1) *l'action de $\text{Aut}(S, \pi)$ sur la base de la fibration donne lieu à une suite exacte*

$$1 \rightarrow \text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \rightarrow \text{Aut}(S, \pi) \rightarrow H_\Delta \rightarrow 1,$$

où H_Δ est le sous-groupe de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ constitué des éléments qui préservent l'ensemble Δ et $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{C}^ \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

- (2) Chaque élément non-trivial de $\mathbb{C}^* \subset \text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ fixe (point par point) deux courbes rationnelles et chaque élément de $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \setminus \mathbb{C}^*$ est une involution qui fixe une courbe irréductible, revêtement double de \mathbb{P}^1 , via π , ramifiée aux points de Δ .
- (3) Le groupe $\mathbb{C}^* \subset \text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ agit trivialement sur $\text{Pic}(S)$.
- (4) Pour toute involution $\sigma \in \text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \setminus \mathbb{C}^*$, on a

$$\text{rk Pic}(S)^\sigma = \text{rk Pic}(S)^{\text{Aut}(S,\pi)} = 2$$

Démonstration. Soit $\Delta \subset \mathbb{P}^1$ l'ensemble des points ayant une fibre singulière et soit $2n$ le nombre de points de Δ . Notons également s_1 et s_2 les deux sections d'auto-intersection $-n$ et $\eta_n : S \rightarrow \mathbb{F}_n$, $\eta_0 : S \rightarrow \mathbb{F}_0$ les morphismes donnés par le lemme 4.3.1. Le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ agit sur l'ensemble $\{s_1, s_2\}$ et donne donc lieu à une suite exacte

$$1 \rightarrow H \rightarrow \text{Aut}(S, \pi) \rightarrow W \rightarrow 1,$$

où $W \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De plus, pour $i = 0$ et $i = n$ le groupe H est conjugué par η_i au groupe des automorphismes de \mathbb{F}_i qui fixent les points éclatés par η_i .

Montrons que $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En écrivant $\Delta = \{p_i\}_{i=1}^{2n}$, nous pouvons supposer que les points éclatés par le morphisme $\eta_0 : S \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sont $\{(p_i, (0 : 1))\}_{i=1}^n, \{(p_i, (1 : 0))\}_{i=1}^{2n}$. Choisissons pour $i = 1, \dots, 2n$ une forme homogène de degré 1 s'annulant en p_i , que l'on note m_i , et définissons alors l'application birationnelle de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ suivante :

$$\varphi : ((x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \dashrightarrow \left((x_1 : x_2), (y_2 \prod_{i=1}^n m_i(x_1, x_2) : y_1 \prod_{i=n+1}^{2n} m_i(x_1, x_2)) \right).$$

Les points bases de φ et de son inverse (qui est φ elle-même) étant exactement les points éclatés par η_0 , φ se relève à une involution $\eta_0^{-1} \varphi \eta_0 \in \text{Aut}(S)$ qui préserve la fibration, échange s_1 sur s_2 et échange donc les composantes de chaque fibre singulière. Ceci démontre que $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que $\text{Aut}(S, \pi) = H \rtimes \langle \varphi \rangle$.

Observons que le noyau de l'action de H sur la base la fibration est le relevé du tore de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ constitué des automorphismes de la forme

$$((x_1 : x_2), (y_1 : y_2)) \mapsto ((x_1 : x_2), (y_1 : \alpha y_2)), \quad \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Le groupe $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ est donc le groupe isomorphe à $\mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, engendré par ce tore et par φ . Les éléments non-triviaux du tore fixent deux courbes rationnelles et les autres éléments non-triviaux de $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ fixent des courbes irréductibles, qui sont des revêtements double de \mathbb{P}^1 , via π , ramifiés le long des points de Δ . Le tore laisse chaque composante de chaque fibre singulière invariante et donc agit trivialement sur $\text{Pic}(S)$.

Le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ agissant sur l'ensemble des fibres exceptionnelles, l'image de l'action de $\text{Aut}(S, \pi)$ sur la base de la fibration est contenue dans le groupe H_Δ des automorphismes de \mathbb{P}^1 qui préservent l'ensemble Δ . Réciproquement, tout élément de ce type peut se voir comme un automorphisme de la section de \mathbb{F}_n qui contient

les $2n$ points éclatés par η_n . Un tel automorphisme s'étend à un automorphisme de \mathbb{F}_n et se relève donc à un élément de H .

Il reste à prouver la dernière assertion. Le groupe $\text{Pic}(S)$ est engendré par le diviseur canonique K_S , le diviseur f d'une fibre et les diviseurs E_1, \dots, E_{2n} des courbes contractées par η_n . Observons que σ échange les composantes de chaque fibre singulière et donc envoie E_i sur $f - E_i$. La matrice de cet automorphisme relativement à la base $K_S, f, f - 2E_1, \dots, f - 2E_{2n}$ est donc diagonale, avec deux valeurs propres égales à 1 et les autres à -1 . Ceci montre que la partie de $\text{Pic}(S)$ invariante par σ (et donc par $\text{Aut}(S, \pi)$) est de rang 2, engendré par f et K_S . \square

Proposition 4.3.4. *Soit (S, π) un fibré exceptionnel. Le groupe $\text{Aut}(S)$ est un sous-groupe algébrique du groupe de Cremona. De plus, $\text{Aut}(S) = \text{Aut}(S, \pi)$ si et seulement si le nombre de fibres singulières de π est plus grand ou égal à 4.*

Démonstration. L'algébricité du groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ suit de la proposition 2.2.6. De plus, le noyau de l'action de $\text{Aut}(S)$ sur $\text{Pic}(S)$ contient un groupe isomorphe à \mathbb{C}^* (lemme 4.3.3). Ceci implique [Har87] que le groupe $\text{Aut}(S)$ agit de manière finie sur $\text{Pic}(S)$ et est donc un sous-groupe algébrique du groupe de Cremona.

Si le nombre de fibres singulières est 2, alors d'après le lemme 4.3.1, la surface S est obtenue en éclatant deux points généraux de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et est donc la surface de del Pezzo de degré 6. Ceci montre que $\text{Aut}(S)$ est strictement plus grand que $\text{Aut}(S, \pi)$ (voir paragraphe 3.2).

Réciproquement, si le groupe $\text{Aut}(S)$ est strictement plus grand que $\text{Aut}(S, \pi)$, alors l'égalité $\text{rk Pic}(S)^{\text{Aut}(S, \pi)} = 2$ (lemme 4.3.3) implique que $\text{rk Pic}(S)^{\text{Aut}(S)} = 1$. Ceci montre que S est une surface de del Pezzo (en utilisant un argument de moyenne) et donc que le nombre de fibres singulières est au plus 2 (sinon il existerait une courbe d'auto-intersection $-n$ avec $n \geq 2$). \square

Nous finissons cette présentation des fibrés exceptionnels par un lemme technique sur ceux-ci, qui reprend [DI07, Prop. 5.2] (ce dernier résultat est prouvé pour un groupe fini, mais la preuve s'ajuste naturellement au cas général).

Lemme 4.3.5. *Soit (S, π) un fibré en coniques avec au moins une fibre singulière dont les composantes sont permutées par un élément de $\text{Aut}(S, \pi)$.*

Si $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ contient un élément non-trivial qui agit trivialement sur $\text{Pic}(S)$ alors S est un fibré exceptionnel. Sinon, $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ pour $r = 0, 1, 2$.

Démonstration. Soit $G \subset \text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ le noyau de l'action de $\text{Aut}(S, \pi)$ sur $\text{Pic}(S)$. En contractant une composante dans chaque fibre singulière, nous obtenons un morphisme birationnel de fibrés en coniques G -équivariant $\eta : S \rightarrow \mathbb{F}_r$, pour un certain $r \geq 0$. De plus $R = \eta G \eta^{-1} \subset \text{Aut}(\mathbb{F}_r)$ fixe tous les points éclatés par η . Si $R \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ n'est pas trivial, alors il fixe un ou deux points sur chaque fibre de \mathbb{F}_r et fixe donc une ou deux sections de \mathbb{F}_r . Le relevé de l'ensemble de ces sections sur S est invariant par $\text{Aut}(S, \pi)$. Le fait qu'un élément de $\text{Aut}(S, \pi)$ échange les composantes d'une fibre singulière implique qu'il y a exactement 2 sections s_1 et s_2 disjointes, fixées par G et échangées par un élément de $\text{Aut}(S, \pi)$; elles ont donc la même auto-intersection $-n$. En contractant dans chaque fibre

exceptionnelle la composante qui touche s_1 , on obtient le morphisme birationnel $\eta_n : S \rightarrow \mathbb{F}_n$ du lemme 4.3.1, ce qui implique que le fibré (S, π) est exceptionnel.

Supposons maintenant que G est trivial. Ceci implique que tout élément non-trivial $\alpha \in \text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ est une involution et la conclusion suit du fait que $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$. \square

4.4. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques

Le lemme suivant se démontre directement par calcul dans $\text{PGL}(2, \mathbb{C}(x)) \subset \mathbf{dJo}$; nous le laissons en exercice.

Lemme 4.4.1. *Toute involution de $\text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ est conjuguée à un élément de la forme $\sigma_f = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, où $f \in \mathbb{C}(x)^*$. De plus, σ_f et σ_g sont conjugués si et seulement si f/g est un carré de $\mathbb{C}(x)^*$. \square*

Ceci implique notamment que deux involutions de $\text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ sont conjuguées si et seulement si elles ont le même déterminant (ce dernier étant à valeur dans $\mathbb{C}(x)^*/(\mathbb{C}(x)^*)^2$).

Définition 4.4.2. On notera ξ l'application bijective qui associe à un ensemble $A = \{(a_i : b_i)\}_{i=1}^{2n} \subset \mathbb{P}^1$ de $2n \geq 0$ points du plan la classe de $\prod_{i=1}^{2n} (a_i x - b_i)$ dans $\mathbb{C}(x)^*/(\mathbb{C}(x)^*)^2$.

Rappelons que l'on voit $\text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ comme un sous-groupe de \mathbf{dJo} (definition 4.1.2), et que l'élément $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ s'interprète alors comme l'application birationnelle $(x, y) \mapsto (x, (\alpha(x)y + \beta(x))/(\gamma(x) + \delta(x)))$ de \mathbb{C}^2 (ou $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). Les deux lemmes suivants se vérifient également directement à la main.

Lemme 4.4.3. *Soit $\sigma \in \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ une involution, de déterminant $\det(\sigma) \in \mathbb{C}(x)^*/(\mathbb{C}(x)^*)^2$.*

Si $\det(\sigma) = [1]$, alors σ est diagonalisable et fixe deux courbes rationnelles.

Si $\det(\sigma) \neq [1]$ alors σ n'est pas diagonalisable et fixe une courbe irréductible, birationnelle à un revêtement double de \mathbb{P}^1 , ramifié le long de l'ensemble A ayant un nombre pair positif de points, tel que $\xi(A) = \det(\sigma)$. \square

Lemme 4.4.4. *Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$, où $f \in \mathbb{C}(x)^*$ n'est pas un carré et notons N_σ le normalisateur de $\langle \sigma \rangle$ dans le groupe $\text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$.*

Le groupe N_σ est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & bf \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & -bf \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{C}(x)$ et est donc égal à $N_\sigma^0 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où N_σ^0 est le groupe isomorphe à $\mathbb{C}(x)[\sqrt{f}]^/\mathbb{C}(x)^*$, via l'homomorphisme $\begin{pmatrix} a & bf \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto [a + b\sqrt{f}]$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par l'involution diagonale. L'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur N_σ^0 envoie $[\rho] = [a + b\sqrt{f}]$ sur $[\rho^{-1}] = [a - b\sqrt{f}]$. \square*

Rappelons le résultat suivant, démontré dans [Bea07, Lemme 2.1].

Lemme 4.4.5. *L'application $\det : \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}(x)) \rightarrow \mathbb{C}(x)^*/(\mathbb{C}(x)^*)^2$ induit une bijection entre les classes de conjugaison de sous-groupes de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et les sous-groupes de $\mathbb{C}(x)^*/(\mathbb{C}(x)^*)^2$ d'ordre ≤ 4 . \square*

Nous avons introduit en (2.5) la notion de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques. Nous avons également défini pour chaque $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques son *triplet de points de ramification*, qui est un ensemble de trois ensembles de points de \mathbb{P}^1 . Décrivons maintenant l'importance de ces points.

Proposition 4.4.6. *Soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques avec k fibres singulières, soit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les trois involutions de $\mathrm{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ et soit $\{A_1, A_2, A_3\}$ le triplet de points de ramification du fibré, de telle sorte que σ_i fixe une courbe C_i , revêtement double de \mathbb{P}^1 via π , ramifiée au-dessus des points de A_i . Notons $2a_i$ le nombre de points de A_i , pour $i = 1, \dots, 3$. Alors :*

- (1) *pour $i = 1, \dots, 3$, l'involution σ_i permute les deux composantes de $2a_i$ fibres singulières, qui sont les fibres au-dessus des points de A_i ;*
- (2) *chacune des fibres singulières de π a ses deux composantes échangées par deux involutions de $\mathrm{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$, en particulier $k = a_1 + a_2 + a_3$;*
- (3) *en notant f le diviseur d'une fibre de π , on a*

$$\mathrm{Pic}(S)^{\mathrm{Aut}(S/\mathbb{P}^1)} = \mathrm{Pic}(S)^{\mathrm{Aut}(S, \pi)} = \mathbb{Z}K_S \oplus \mathbb{Z}f;$$

- (4) *pour $i = 1, \dots, 3$, la courbe C_i est égale à $-K_S + (a_i - 2)f$ dans $\mathrm{Pic}(S)$ et $(C_i)^2 = 4a_i - k$.*
- (5) *si (S', π') est un fibré en coniques et s'il existe une application birationnelle de fibrés en coniques $\varphi : S \dashrightarrow S'$ qui conjugue $\mathrm{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(S', \pi')$, alors φ est un isomorphisme ;*
- (6) *l'application qui associe à un fibré en coniques son triplet de points de ramification est une bijection entre les classes d'isomorphisme de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques et les triplets de ramification, à action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ près.*

Démonstration. Notons $V = \mathrm{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Chaque fibre singulière de π est permutée par au moins une involution de V (et donc par exactement deux involutions). Sinon, l'action de V sur chacune des composantes devant avoir un point fixe (le point singulier de la fibre), une involution $\sigma_i \subset V$ fixerait chacune des deux composantes, et aurait un ensemble de point fixes singulier. Observons ensuite que la courbe fixée par σ_i est ramifiée exactement aux points correspondant aux fibres singulières dont les composantes sont permutées par σ_i , ce qui donne les deux premières assertions.

Choisissons une composante dans chacune des k fibres singulières et notons E_1, \dots, E_k ces courbes exceptionnelles. Alors, l'action de $\mathrm{Aut}(S, \pi)$ sur $\mathrm{Pic}(S)$ fixe le sous-ensemble $\mathbb{Z}K_S \oplus \mathbb{Z}f$ et V agit de manière diagonale sur $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$, selon la base $K_S, f, 2E_1 - f, \dots, 2E_k - f$. Le fait que pour tout i l'élément $2E_i - f$ soit envoyé sur $-2E_i + f$ par un élément de V implique que $\mathrm{Pic}(S)^V = \mathrm{Pic}(S)^{\mathrm{Aut}(S, \pi)} = (\mathbb{Q}K_S \oplus \mathbb{Q}f) \cap \mathrm{Pic}(S)$; or ce dernier groupe est égal à $\mathbb{Z}K_S \oplus \mathbb{Z}f$ (lemme 4.1.3).

Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Comme C_i est invariante par V , elle est égale à $aK_S + bf$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$. L'égalité $C_i \cdot f = 2$ donne $a = -1$ et $C(C + K_S) = -2 + 2g(C_i) =$

$-2 + 2(a_i - 1)$ donne $b = 2 - a_i$. La valeur de $(C_i)^2$ se calcule avec l'égalité $(K_S)^2 = 8 - k$.

Prouvons maintenant l'assertion (5). Comme φ est une application birationnelle de fibrés en coniques V -équivariante, elle envoie une fibre sur une fibre. Le groupe V permute les composantes de chaque fibre singulière; φ est donc une composition de liens élémentaires V -équivariants (voir notamment [Isk96], [DI07]), chacun consistant en un éclatement d'une orbite de V , dont tous les points appartiennent à des fibres lisses distinctes, suivi par une contraction des fibres contenant ces points. Le fait que V agisse sans point fixe sur chaque fibre lisse montre que φ est un isomorphisme. Ceci démontre l'assertion (5), et également que l'application de l'assertion (6) est injective. L'utilisation du lemme 4.4.5 et de la bijection ξ de la définition 4.4.2 donne la surjectivité de cette application. \square

Comme nous l'avons annoncé au début de l'article, nous verrons que les automorphismes des $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques sont des sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona si et seulement si la surface ambiante n'est pas une surface de del Pezzo. La proposition suivante détermine quand c'est le cas (ce sera précisé à la section 9).

Proposition 4.4.7. *Soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques avec k fibres singulières.*

- (1) *si $k \geq 8$, alors S n'est pas une surface de del Pezzo;*
- (2) *si $k \leq 5$, alors S est une surface de del Pezzo;*
- (3) *si $k = 6, 7$ alors S n'est pas une surface de del Pezzo, si et seulement si une des situations suivantes se présente :*
 1. *S contient 4 sections d'auto-intersection -2 ;*
 2. *une courbe fixée par une involution de $\text{Aut}(S, \pi)$ est rationnelle, ce qui implique qu'elle a auto-intersection $4 - k$.*

Remarque 4.4.8. L'assertion (2) suit de [DI07, Proposition 5.5]. Le cas où $k = 6, 7$ peut donner des surfaces de del Pezzo, mais également d'autres surfaces plus exotiques (voir section 9.1).

Démonstration. La première assertion suit de l'égalité $(K_S)^2 = 8 - k$. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les trois involutions de $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ qui permutent les composantes de respectivement $2a_1, 2a_2, 2a_3$ fibres singulières. Soit s_0 une section d'auto-intersection $-r$, où $-r \leq -1$ est le minimum des auto-intersections des sections de π et notons $s_i = \sigma(s_0)$ pour $i = 1, \dots, 3$. En contractant les composantes des fibres exceptionnelles ne touchant pas s_0 nous obtenons un morphisme birationnel de fibrés en coniques $\eta_r : S \rightarrow \mathbb{F}_r$, qui envoie s_0 sur la section exceptionnelle. De plus, pour $i = 1, \dots, 3$, la courbe s_i est envoyée sur une section d'auto-intersection $-r + 2a_i$, ce qui montre que $a_i \geq r$.

Supposons que $r = 1$, $k \leq 7$ et que S n'est pas une surface de del Pezzo. Ceci est équivalent à ce qu'il existe une courbe irréductible d'auto-intersection ≤ -2 sur S (se déduit par exemple de [Dem76, Prop. 2 et Théorème 1]). Contractons la section exceptionnelle de \mathbb{F}_1 sur le point $q \in \mathbb{P}^2$. La surface S est obtenue en éclatant q , ainsi que k autres points de \mathbb{P}^2 , tous appartenant à des droites différentes passant par q . L'inégalité $k \leq 7$ implique que les courbes d'auto-intersection ≤ -2 sont les

transformées strictes de droites, coniques ou cubiques de \mathbb{P}^2 et le fait que $r = 1$ implique que ces courbes intersectent une fibre en 2 points au moins. Ce sont donc soit des coniques passant par au minimum 6 points éclatés (et pas par q), soit des cubiques passant par 8 points éclatés et ayant un point double à l'un des points éclatés (et pas en q). À cause de l'intersection entre de telles courbes, il ne peut y en avoir 2 et donc la seule courbe d'auto-intersection ≤ -2 sur S est laissée invariante par $\text{Aut}^0(S, \pi)$. C'est donc une bisection, qui est fixée par une involution $\sigma_i \in \text{Aut}^0(S, \pi)$. Or cette courbe est d'auto-intersection $4a_i - k$ (proposition 4.4.6), ce qui implique que $a_i = 1$ et $k \geq 6$ et donne la dernière possibilité citée dans l'énoncé. Réciproquement, si $k = 6, 7$ et $a_i = 1$ pour un certain i , la surface n'est pas de del Pezzo.

Supposons que $r > 1$. Alors, il existe une section d'auto-intersection $-r \leq -2$ et donc S n'est pas une surface de del Pezzo. Nous avons observé précédemment que pour $i = 1, \dots, 3$ on a $a_i \geq r$, et comme $a_1 + a_2 + a_3 = k$ (proposition 4.4.6), on trouve que $r = 2$ et $k \geq 6$. La section est donc d'auto-intersection -2 et son orbite par V donne 4 sections de même auto-intersection. \square

5. Chaque groupe algébrique est contenu dans un des groupes de la liste

Dans cette section, nous démontrons (à la proposition 5.3.1) que chaque sous-groupe algébrique du groupe de Cremona est contenu dans un des groupes décrits dans le théorème 1. À l'aide de la proposition 2.2.5 on se ramène aux cas où le groupe agit de manière minimale sur une surface de del Pezzo ou un fibré en coniques. Ces deux cas divisent la présente section.

5.1. Le cas des automorphismes de surfaces de del Pezzo

Proposition 5.1.1. *Soit S une surface de del Pezzo. Le groupe $\text{Aut}(S)$ est birationnellement conjugué à un sous-groupe de l'un des groupes décrits dans le théorème 1.*

Démonstration. Si S est l'une des surfaces \mathbb{P}^2 , $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ou une surface de del Pezzo de degré 1, 4, 5 ou 6, alors $\text{Aut}(S)$ fait partie de la liste des groupes du théorème. Si S est l'éclatement de 1 (respectivement 2) point(s) dans le plan, alors le couple $(\text{Aut}(S), S)$ n'est pas minimal; on contracte une courbe et le groupe $\text{Aut}(S)$ est birationnellement conjugué à un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ (respectivement $\text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$). Si S est une surface de del Pezzo de degré 2 (respectivement 3) et que $\text{Aut}(S)$ fixe un point de S qui n'est pas sur une courbe exceptionnelle, l'éclatement de ce point conjugue $\text{Aut}(S)$ à un sous-groupe de $\text{Aut}(S')$, pour une surface S' de del Pezzo de degré 1 (respectivement 2). Le dernier cas est celui où le degré de S est 2 ou 3 et où tous les points fixes de l'action de $\text{Aut}(S)$ sur S sont sur les courbes exceptionnelles, qui fait partie de la liste du théorème. \square

5.2. Le cas des automorphismes de fibrés en coniques

Rappelons tout d'abord le résultat suivant, probablement connu du spécialiste.

Lemme 5.2.1. *Soit (S, π) un fibré en coniques et supposons que le nombre de fibres singulières est 1 ou 2 et que le couple $(\text{Aut}(S, \pi), S)$ est minimal. Alors, S*

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

est la surface de del Pezzo de degré 6 (en particulier le nombre de fibres singulières est 2).

Démonstration. Notons $-r$ l'auto-intersection la plus petite de toutes les sections de π . En contractant une composante dans chaque fibre singulière, on vérifie que r existe et $r > 0$. La minimalité du couple $(\text{Aut}(S, \pi), S)$ implique qu'il existe un automorphisme qui échange les composantes de chaque fibre singulière et donc qu'il existe au moins 2 sections d'auto-intersection $-r$; on note s_1 et s_2 ces deux sections. En contractant dans chaque fibre singulière la composante qui ne touche pas s_1 on obtient un morphisme birationnel de fibrés en coniques $\pi : S \rightarrow \mathbb{F}_r$ qui envoie s_1 sur la section exceptionnelle et envoie s_2 sur une section d'auto-intersection $-r + l$, où $l \in \{1, 2\}$. Ceci implique que $-r + l \geq r$ et donc que $r = 1$ et $l = 2$. La surface S est donc obtenue en éclatant deux points de \mathbb{F}_1 dans des fibres différentes et pas sur la section exceptionnelle, elle est alors isomorphe à la surface de del Pezzo de degré 6. \square

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition clé de cette section, en utilisant la structure algébrique du groupe $\mathbf{dJo} = \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x)) \rtimes \text{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Proposition 5.2.2. *Soit G un sous-groupe algébrique du groupe de de Jonquières et notons $G' \subset G$ et $H \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ le noyau et l'image de l'action de G sur la base de la fibration. On suppose que H est fini, alors :*

- (1) Si $G' = \{1\}$, alors G est conjugué — dans \mathbf{dJo} — à H .
- (2) Si $G' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par une involution dont le déterminant n'est pas trivial, alors G normalise un groupe $V \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et contenant G' .

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le corps $\mathbb{C}(x)$ a la propriété C_1 par le théorème de Tsen et donc que pour tout groupe fini H , les ensembles $H^1(H, \text{GL}(2, \mathbb{C}(x)))$ et $H^2(H, \mathbb{C}(x)^*)$ sont réduits à un élément (voir [Ser68, chap. X, prop. 3 et 11]). Ceci implique donc que $H^1(H, \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))) = \{1\}$.

Supposons que $G' = \{1\}$, ce qui implique qu'il existe une section $H \rightarrow G \subset \mathbf{dJo}$. La différence de cette section avec la section canonique donnée par l'inclusion de G dans \mathbf{dJo} représente un co-cycle. Le fait que $H^1(H, \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))) = \{1\}$ implique que ce co-cycle est conjugué au co-cycle trivial, i.e. que G est conjugué à H , ce qui démontre l'assertion (1).

Il reste à prouver l'assertion (2). Notons σ l'élément d'ordre 2 de G' . Après conjugaison par un élément de $\text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$, on peut supposer que $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pour un certain élément $f \in \mathbb{C}(x)^*$. De plus, l'hypothèse sur le déterminant de σ implique que f n'est pas un carré.

Notons N_σ le normalisateur de σ dans le groupe $\text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ et rappelons (lemme 4.4.4) que $N_\sigma = N_\sigma^0 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où N_σ^0 est isomorphe à $\mathbb{C}(x)[\sqrt{f}]^*/\mathbb{C}(x)^*$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur N_σ^0 en envoyant $[\rho] = [a + b\sqrt{f}]$ sur $[\rho^{-1}] = [a - b\sqrt{f}]$.

Décrivons maintenant une construction qui associe à tout élément $h \in H$ un élément $\rho_h \in N_\sigma^0$ et un élément $\mu_h \in \mathbb{C}(x)^*$. La préimage de h dans G est constituée de deux éléments $(\gamma, h), (\sigma\gamma, h) \in \mathbf{dJo}$. Comme σ est dans le centre de G , on a $\gamma h(\sigma)\gamma^{-1} = \sigma$. L'élément $h(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & h(f) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ étant conjugué à $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

JÉRÉMY BLANC

dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$, il existe $\mu \in \mathbb{C}(x)^*$ tel que $\mu^2 = f/h(f)$ (Lemme 4.4.1). On écrit $\beta = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\beta h(\sigma) \beta^{-1} = \sigma$. Alors, γ s'écrit $\gamma = \alpha \beta$, avec $\alpha \in N_\sigma$. Choisissons le signe de μ de telle sorte que $\alpha \in N_\sigma^0$. Nous désignons alors respectivement par ρ_h et μ_h les éléments $\alpha^2 \in N_\sigma^0$ et $\mu \in \mathbb{C}(x)^*$, en remarquant que ces deux éléments sont uniquement déterminés par h , puisque $\sigma \alpha \in N_\sigma^0$ et $(\sigma \alpha)^2 = \alpha^2$.

Étudions maintenant plus précisément les deux applications ρ, μ qui envoient h respectivement sur ρ_h et μ_h . Étant donné deux éléments $h_1, h_2 \in H$, posons $h_3 = h_1 h_2$ et choisissons comme avant $(\alpha_i \beta_i, h_i) \in G$ pour $i = 1, 2, 3$, avec $\alpha_i \in N_\sigma^0$ et $\beta_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mu_i^2 = f/h_i(f)$. On peut choisir $\alpha_3 \beta_3$ de telle sorte que $(\alpha_1 \beta_1, h_1) \cdot (\alpha_2 \beta_2, h_2) = (\alpha_3 \beta_3, h_3)$, ce qui implique que $\alpha_3 = \alpha_1 \beta_1 \cdot h_1(\alpha_2 \beta_2) \cdot (\beta_3)^{-1}$. En écrivant $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a & bf \\ b & a \end{pmatrix} \in N_\sigma^0$, calculons :

$$\beta_1 h_1(\alpha_2) (\beta_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot h_1(a) & (\mu_1)^2 \cdot h_1(bf) \\ h_1(b) & \mu_1 \cdot h_1(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot h_1(a) & h_1(b) \cdot f \\ h(b) & \mu_1 \cdot h_1(a) \end{pmatrix};$$

ceci montre que $\beta_1 h_1(\alpha_2) (\beta_1)^{-1}$ appartient à N_σ^0 . De la relation

$$\alpha_3 = \alpha_1 \cdot (\beta_1 h_1(\alpha_2) (\beta_1)^{-1}) \cdot \beta_1 \cdot h_1(\beta_2) \cdot (\beta_3)^{-1}$$

on déduit que l'élément diagonal $\beta_1 \cdot h_1(\beta_2) \cdot (\beta_3)^{-1}$ appartient aussi à N_σ^0 et est alors trivial, d'où l'égalité $\mu_3 = \mu_1 \cdot h_1(\mu_2)$ qui montre que l'application $\mu : H \rightarrow \mathbb{C}(x)^*$ qui envoie h sur μ_h est un co-cycle. Du fait que $H^1(H, \mathbb{C}(x)^*) = \{1\}$, il existe $\nu \in \mathbb{C}(x)^*$ tel que $\mu_h = \nu/h(\nu)$ pour tout $h \in H$; l'élément f/ν^2 est alors invariant par H . Après avoir conjugué G par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ on peut donc supposer que $\mu_h = 1$ pour tout h — qui équivaut à dire que f est invariant par H . En reprenant h_1, h_2, h_3 comme avant, on trouve alors (du fait que $\beta_i = 1$ pour tout i) l'égalité $\alpha_3 = \alpha_1 \cdot h_1(\alpha_2)$, qui montre que l'application $\rho : H \rightarrow N_\sigma^0$ qui envoie h sur ρ_h est maintenant un co-cycle. La suite exacte H -équivariante

$$1 \rightarrow \mathbb{C}(x)^* \rightarrow \mathbb{C}(x)[\sqrt{f}]^* \rightarrow N_\sigma^0 \rightarrow 1,$$

et les égalités $H^1(H, \mathbb{C}(x)[\sqrt{f}]^*) = \{1\}$ et $H^2(H, \mathbb{C}(x)^*) = \{1\}$ impliquent la trivialité de $H^1(H, N_\sigma^0)$. Il existe donc $\gamma \in N_\sigma^0$ tel que $\rho_h = \gamma \cdot h(\gamma)^{-1}$ pour tout $h \in H$. Il reste à voir que cette condition implique que l'involution $(\gamma, -1) \in N_\sigma$ commute avec G , ce qui montre que le groupe $V \subset \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ engendré par σ et $(\gamma, -1)$ est normalisé par G et qui donne le résultat escompté (car V est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$).

Soit $h \in H$ et choisissons $(\alpha \beta, h) \in G$, avec $\alpha \in N_\sigma^0$ et $\beta = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mu^2 = f/h(f)$, comme précédemment. Rappelons que $\mu = 1$ et donc que $\beta = 1$; alors, la conjugaison de $(\gamma, -1) \in N_\sigma$ par (α, h) est le produit $(\alpha, 1) \cdot (h(\gamma), -1) \cdot (\alpha^{-1}, 1)$ dans le groupe $N_\sigma = N_\sigma^0 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ce produit est égal à $(\alpha, 1) \cdot (h(\gamma)\alpha, -1) = (h(\gamma)\alpha^2, -1) = (h(\gamma)\rho_h, -1) = (\gamma, -1)$, ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 5.2.3. *Soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ un fibré en coniques, tel que le couple $(\text{Aut}(S, \pi), S)$ soit minimal. Alors, le groupe algébrique $\text{Aut}(S, \pi)$ est birationnellement conjugué à un sous-groupe d'un des groupes décrits dans le théorème 1.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que π est une fibration en droites. La surface S est donc une surface de Hirzebruch. Si c'est \mathbb{F}_1 , alors $\text{Aut}(S, \pi)$ est conjugué à un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, en contractant la section exceptionnelle. Sinon, $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ est un des groupes de la liste, ce qui termine la démonstration.

Supposons maintenant que le nombre de fibres singulières est 1 ou 2. Le lemme 5.2.1 implique que S est la surface de del Pezzo de degré 6, dont le groupe des automorphismes est présent dans la liste.

Supposons alors que le nombre de fibres singulières est au minimum 3 et notons $H \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ l'image de l'action de $\text{Aut}(S, \pi)$ sur la base de la fibration. Le fait que le nombre de fibres singulières soit au moins 3 implique que H est fini. Si $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ contient un élément non-trivial qui agit trivialement sur $\text{Pic}(S)$, alors (S, π) est un fibré exceptionnel (lemme 4.3.5) et a au minimum 4 fibres singulières (le nombre de fibres singulières étant pair); le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ fait donc partie de la liste.

On peut supposer que $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ ne contient pas d'élément non-trivial qui agit trivialement sur $\text{Pic}(S)$. Le groupe $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ est donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ pour $r = 0, 1, 2$ (lemme 4.3.5). Si $r = 0$, alors $\text{Aut}(S, \pi)$ est conjugué à H (proposition 5.2.2); comme $H \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C}) \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, on a terminé.

Le groupe $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ contient donc une ou trois involutions. Chacune de ces involutions agissant non-trivialement sur $\text{Pic}(S)$, elle échange les composantes d'un certain nombre de fibres singulières et ses points fixes contiennent donc une seule courbe irréductible. Ceci implique que le déterminant de chaque involution de $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ est non-trivial.

Si $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la proposition 5.2.2 nous dit que $\text{Aut}(S, \pi)$ normalise un sous-groupe $V \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, qui contient $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$. Alors, $\text{Aut}(S, \pi)$ est contenu dans le groupe engendré par $\text{Aut}(S, \pi)$ et V , qui est fini et agit alors sur un fibré en coniques.

Il reste donc le cas où $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et où l'application $\det : \text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \rightarrow \mathbb{C}(x)^*/(\mathbb{C}(x)^*)^2$ est injective. Le fibré en coniques (S, π) est donc un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques. Si la surface S est de del Pezzo, alors $\text{Aut}(S, \pi) \subset \text{Aut}(S)$ et le résultat suit de la proposition 5.1.1. Sinon, le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ est un des groupes de la liste. \square

5.3. Le résultat

Proposition 5.3.1. *Soit G un sous-groupe algébrique du groupe de Cremona. Alors, G est conjugué à un sous-groupe d'un des groupes décrits dans le théorème 1.*

Démonstration. On peut supposer que G agit sur une surface S (voir section 2) et assumer de plus que le couple (G, S) est minimal. D'après la proposition 2.2.5, ou bien S est une surface de del Pezzo et le résultat suit de la proposition 5.1.1, ou bien $G \subset \text{Aut}(S, \pi)$ pour un certain fibré en coniques $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ et le résultat suit de la proposition 5.2.3. \square

6. Minimalité des couples

Dans cette section, nous démontrons que les couples du théorème 1 (groupe des automorphismes et surface ambiante) sont minimaux. Ceci servira notamment à démontrer la superrigidité birationnelle de celles-ci, à la section 7.

Lemme 6.1.1. *Soit (S, π) un fibré en coniques ayant k fibres singulières, et supposons qu'il existe un groupe $G \subset \text{Aut}(S, \pi)$ d'ordre 2 ou 4, agissant trivialement sur la base de la fibration, et tel que $\text{rk Pic}(S)^G = 2$. Si $k = 4$ ou $k \geq 6$, le couple (G, S) est minimal.*

Démonstration. Supposons que $k \geq 1$ et que le couple (G, S) ne soit pas minimal. Il existe donc une orbite de (-1) -courbes disjointes C_1, \dots, C_l avec $l = 1, 2, 4$. En notant $D = \sum_{i=1}^l C_i$ on trouve $D^2 = D \cdot K_S = -l$. Comme D est invariant par G , on a $D = aK_S + bf$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$ (lemme 4.1.3), où f est le diviseur de la fibre de π ; de plus l'inégalité $D \cdot f \geq 0$ implique que $a \leq 0$.

Les deux équations précédentes donnent $a(a(K_S)^2 - 4b) = a(K_S)^2 - 2b = -l$, ce qui donne $a(l + 2b) = l$. Les valeurs possibles pour l donnent pour le triplet (l, a, b) les valeurs $(1, -1, -1), (2, -1, -2), (4, -1, -4), (4, -2, -3)$. L'égalité $(K_S)^2 = (2b - l)/a$ nous livre respectivement 3, 6, 12 et 5 comme valeurs possibles pour $(K_S)^2$. Comme $(K_S)^2 = 8 - k$, on trouve que k doit valoir 2, 3 ou 5. \square

Corollaire 6.1.2. *Soit (S, π) un fibré en coniques. Si (S, π) est l'un des deux cas suivants, le couple $(\text{Aut}(S, \pi), S)$ est minimal :*

- (1) *un fibré en coniques exceptionnel ayant au minimum 4 fibres singulières ;*
- (2) *un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques, tel que la surface ambiante ne soit pas une surface de del Pezzo.*

Démonstration. Dans le premier cas, le lemme 4.3.3 implique que $\text{Aut}(S, \pi)$ contient un sous-groupe $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tel que $\text{rk Pic}(S)^G = 2$. Le nombre de fibres singulières de (S, π) étant égal à $2n$ pour $n \geq 2$, le lemme 6.1.1 implique que le couple (G, S) est minimal. Dans le second cas, la proposition 4.4.6 montre que $\text{Aut}(S, \pi)$ contient un sous-groupe $V \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ tel que $\text{rk Pic}(S)^V = 2$. La proposition 4.4.7 nous dit que le nombre de fibres singulières est plus grand ou égal à 6; en appliquant à nouveau le lemme 6.1.1 on trouve que le couple (V, S) est minimal. \square

Proposition 6.1.3. *Soit (S, π) une des fibrations du théorème 1, et $G = \text{Aut}(S, \pi)$.*

Alors, π est une G -fibration de Mori (au sens de la définition 2.1.1) et le couple (G, S) est minimal.

Démonstration. Supposons d'abord que $Y \cong \mathbb{P}^1$, et donc que π est une fibration en coniques. On a toujours $-K_S \cdot f = 2$, où f est le diviseur d'une fibre. Alors, π est une G -fibration de Mori si et seulement si $\text{rk Pic}(S)^G = 2$. Si S est une surface de Hirzebruch \mathbb{F}_n pour $n \geq 2$, alors celle-ci est minimale et donc le couple $(\text{Aut}(S, \pi), S)$ également; comme $\text{rk Pic}(S) = 2$, on trouve $\text{rk Pic}(S)^G = 2$, ce qui termine la preuve. Si π est un fibré exceptionnel ou un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques, le lemme 4.3.3 et la proposition 4.4.6 livrent l'égalité $\text{rk Pic}(S)^G = 2$; le corollaire 6.1.2 montre que le couple (G, S) est minimal.

Supposons que Y soit un point, et donc que S est une surface de del Pezzo et $G = \text{Aut}(S)$. Montrons que le couple (G, S) est minimal et qu'aucun fibré en

coniques n'est laissé invariant par G , ce qui impliquera (proposition 2.2.5) que $\text{rk Pic}(S)^G = 1$ et donc que π est une G -fibration de Mori. Si $S \cong \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, alors S est minimale et donc (G, S) aussi et aucune fibration n'est laissée invariante. Si S est la surface de del Pezzo de degré 6 (respectivement 5), alors G agit transitivement sur les 6 (respectivement 10) courbes exceptionnelles, ce qui implique le résultat. Si S est de degré 4, alors G contient cinq involutions fixant des courbes elliptiques; donc après une conjugaison birationnelle, G ne peut agir sur aucune surface de del Pezzo de degré ≥ 5 , ni sur aucun fibré en coniques. Si S est de degré 3, la minimalité du couple (G, S) est imposée par l'énoncé du théorème 1, ce qui implique qu'aucun fibré en coniques $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ n'est laissé invariant par G (proposition 3.5.1). Si S est de degré 2 (respectivement 1), alors G contient l'involution de Geiser (respectivement celle de Bertini), qui n'agit sur aucune autre surface de del Pezzo de degré supérieur ni sur aucun fibré en coniques, les deux involutions fixant des courbes non-hyperrelleptiques (voir [BB00]). \square

7. Superrigidité birationnelle

La proposition 6.1.3 montre que chacun des couples (G, S) du théorème 1 est minimal et représente une G -fibration de Mori. Nous démontrons maintenant un résultat plus fort, c'est-à-dire que ces G -fibrations de Mori sont birationnellement superrigides.

Lemme 7.1.1. *Soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ un fibré en coniques et soit $G \subset \text{Aut}(S, \pi)$ tel que $\text{rk Pic}(S)^G = 2$. Supposons que $\pi' : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une fibration en coniques avec des fibres différentes de celles de π , qui soit invariante par G . Alors S est une surface de del Pezzo de degré 1, 2 ou 4 ou 8.*

Démonstration. Si S est une surface de Hirzebruch, c'est forcément $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, qui est une surface de del Pezzo de degré 8. On peut alors supposer qu'il y a au moins une fibre singulière. Notons f le diviseur de la fibre de π et C celui de la fibre de π' . Le lemme 4.1.3 implique que $\text{Pic}(S)^G = \mathbb{Z}K_S \oplus \mathbb{Z}f$; on écrit alors $C = -aK_S + bf$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$. L'inégalité $C \cdot f \geq 0$ implique $a \geq 0$ et les équations $C^2 = 0$ et $-K_S \cdot C = 2$ donnent respectivement $a(a(K_S)^2 + 4b) = 0$ et $a(K_S)^2 + 2b = 2$, ce qui implique que $b = -1$ et $a(K_S)^2 = 4$. On trouve donc que $(K_S)^2 \in \{1, 2, 4\}$. Il reste à voir que S est une surface de del Pezzo. Si tel n'est pas le cas, alors il existe une courbe irréductible d'auto-intersection ≤ -2 (se déduit par exemple de [Dem76, Prop. 2 et Théorème 1]); en notant D le diviseur de la courbe on trouve $D \cdot f > 0$ et $D \cdot (-K_S) \leq 0$. Ceci implique l'inégalité $D \cdot C < 0$, qui est impossible. \square

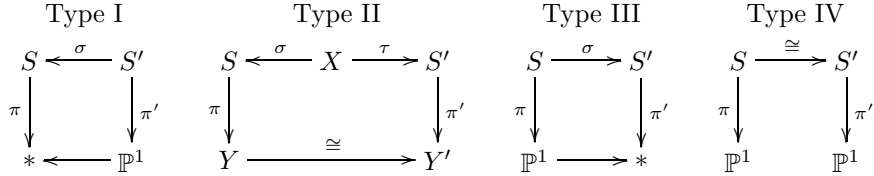
Proposition 7.1.2. *Soit $\pi : S \rightarrow Y$ une des fibrations du théorème 1 et notons $G = \text{Aut}(S, \pi)$.*

Soit $\pi' : S' \rightarrow Y'$ une G -fibration de Mori et supposons qu'il existe une application birationnelle $\varphi : S \dashrightarrow S'$ qui soit G -équivariante. Alors, φ est un isomorphisme de G -fibrations de Mori.

Ceci signifie que la G -fibration de Mori $\pi : S \rightarrow Y$ est birationnellement superrigide.

Démonstration. On peut décomposer φ en automorphismes de G -fibrations de Mori et *liens élémentaires* G -équivariants, chacun passant d'une G -fibration de Mori à une autre. Ceci est appelé actuellement *programme de Sarkisov G -équivariant* et a été démontré dans le cas des surfaces dans [Isk96] (voir aussi [Cor95]). Notons que la démonstration de [Isk96] et [Cor95] se fait dans le cas où G est le groupe de Galois d'une extension de corps, mais que le cas où G agit de manière géométrique se démontre de la même manière (voir la section 2.2 et l'Introduction de [Man67]); citons également la démonstration de [DI07], faite dans le cadre géométrique. Les liens élémentaires sont classifiés dans [Isk96] (ainsi que dans [DI07]).

Nous allons démontrer qu'aucun lien ne sort de la G -surface (G, S) , ce qui achèvera la démonstration. Il suffit donc de supposer que φ est un lien élémentaire et de trouver une contradiction. Il y a 4 types de liens possibles (que l'on retrouve dans [Isk96]), qui dépendent notamment de Y et Y' ; ces derniers pouvant être \mathbb{P}^1 ou un point (noté $*$). Les 4 liens sont décrits dans la figure suivante :



où G agit birégulièrement sur S, S', X et σ et τ sont des morphismes birationnels contractant une G -orbite et tous les diagrammes sont commutatifs et G -équivariants.

Si la surface S est $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, la surface de del Pezzo de degré 6 (3.2) ou une surface de Hirzebruch \mathbb{F}_n avec $n \geq 2$ alors aucun lien de type I, II, III n'est possible, car il n'existe pas d'orbite finie. Les liens de type IV ne sont pas possibles non plus car aucune de ces surfaces n'admet deux fibrations en coniques G -équivariantes.

Étudions maintenant dans les autres cas chacun des 4 liens.

Lien de type I. Dans ce cas, S est une surface de del Pezzo et Y est un point. De plus, [Isk96, Théorème 2.6] montre que $(K_S)^2 = 4, 8, 9$. Les cas 8 et 9 ayant été étudiés précédemment (\mathbb{P}^2 et les surfaces de Hirzebruch), il nous reste $(K_S)^2 = 4$, mais alors $G = \text{Aut}(S)$ contient un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, engendré par 5 involutions qui fixent chacune une courbe elliptique (3.4). Un tel groupe ne pouvant pas agir sur un fibré en coniques, ce lien n'est pas possible.

Lien de type II. Deux cas se présentent. Si $Y, Y' \cong \mathbb{P}^1$, alors σ éclate une orbite de G sur S , dont tous les points appartiennent à des fibres lisses distinctes et τ contracte les transformées strictes des fibres de chacun des points éclatés par σ . Comme chacun des groupes G du théorème préservant des fibrations agit sans point fixe sur chaque fibre lisse, ce lien n'est pas possible. Il nous reste le cas où Y, Y' sont des points et S, S' sont des surfaces de del Pezzo. Alors, [Isk96, Théorème 2.6] montre que le nombre de points éclatés par σ est strictement plus petit que $(K_S)^2$ et que X est une surface de del Pezzo; aucun des points éclatés n'appartient donc à une courbe exceptionnelle. Il suffit alors de voir que les orbites de l'action de $\text{Aut}(S)$ sur S privé de ses courbes exceptionnelles ont toutes une taille au moins

égale à $(K_S)^2$. Si $(K_S)^2 = 1$, c'est clair ; si $(K_S)^2 \leq 3$, c'est imposé par l'énoncé du théorème 1 et par le lemme 3.5.3. Si $(K_S)^2 = 4$, alors $S \subset \mathbb{P}^4$ est l'intersection de deux quadriques (3.4) et $\text{Aut}(S)$ contient le sous-groupe diagonal $T \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ dont les orbites sur S sont toutes de taille au moins égale à 4. Si $(K_S)^2 = 5$, alors S est l'éclatement de 4 points dans le plan et $\text{Aut}(S)$ contient le relevé du groupe $\text{Sym}_4 \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ préservant ces points. Or, les orbites de ce dernier sur le plan privé des droites passant par les 4 points sont toutes de taille au moins égale à 6.

Lien de type III. Ici, $\pi : S \rightarrow Y$ est une fibration en coniques et [Isk96, Theorem 2.6] nous dit qu'un tel lien n'existe que si $S \cong \mathbb{F}_1$ (ce qui n'est pas le cas ici) ou si $(K_S)^2 \in \{3, 5, 6\}$, c'est-à-dire que le nombre de fibres singulières est 6, 3 ou 2 et qui n'est pas le cas non plus.

Lien de type IV. Ici, $\pi : S \rightarrow Y$ est une fibration en coniques et le lien consiste en un changement de fibration en coniques sur la même surface. Il suffit de voir $\text{Aut}(S, \pi)$ ne préserve aucune autre fibration en coniques sur S . Si $S \cong \mathbb{F}_n$ pour $n \geq 2$, c'est vrai car il n'existe qu'une fibration en coniques sur \mathbb{F}_n . Si on est dans le cas d'un fibré exceptionnel ou d'un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques, alors S n'est pas une surface de del Pezzo (dans le premier cas, la courbe contient deux sections d'auto-intersections ≤ -2 et dans le deuxième cas c'est imposé par l'énoncé du théorème 1) ; l'inexistence d'une autre fibration suit alors du lemme 7.1.1. \square

8. Démonstrations des théorèmes

Démonstration du théorème 1. La proposition 5.3.1 montre que tout sous-groupe algébrique du groupe de Cremona est contenu dans un groupe de l'une des familles du théorème 1. Ceci implique alors que tout groupe algébrique maximal est égal à l'un de ces groupes.

La maximalité de chacun de groupes et les deux dernières assertions du théorème suivent alors de la proposition 7.1.2. \square

Démonstration du théorème 2. Le théorème 1 étant établi, il s'agit maintenant de montrer que les descriptions des groupes d'automorphismes et les paramétrisations du théorème 2 sont correctes.

Les groupes d'automorphismes des surfaces de del Pezzo proviennent des descriptions faites à la section 3 et ceux des fibrés en coniques de la section 4.

En ce qui concerne les paramétrisations des surfaces de del Pezzo, les seuls cas qui ne découlent pas directement du théorème 1 sont les surfaces de degré 2 et 3. Dans le premier cas, S est le revêtement double de \mathbb{P}^2 le long d'une quartique lisse (3.6) et il faut alors observer qu'une courbe exceptionnelle de S correspond à une bitangente de la quartique. Pour les surfaces cubiques, la proposition 3.5.2 et le lemme 3.5.3 donnent les trois familles de surfaces qui ont des groupes d'automorphismes qui sont des sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona. La première famille est de la forme $W^3 = L_3(X, Y, Z)$, où L_3 est l'équation d'une cubique lisse de \mathbb{P}^2 , que l'on peut mettre sous forme de Hesse $X^3 + Y^3 + Z^3 + \lambda XYZ$. Deux cubiques lisses du plan étant isomorphes si et seulement si il existe un automorphisme du plan qui envoie l'une sur l'autre, la classe d'isomorphisme de la courbe cubique détermine celle de la surface cubique. La deuxième famille ne comporte qu'un élément (voir la proposition 3.5.2) et la dernière est celle des surfaces

isomorphes à $W^3 + W(X^2 + Y^2 + Z^2) + \lambda XYZ = 0$ avec $9\lambda^3 \neq 8\beta$, $8\lambda^3 \neq -1$. La classe d'isomorphisme au sein de cette famille est déterminée par le paramètre λ , à un facteur -1 près. Ceci se détermine en cherchant les automorphismes de \mathbb{P}^3 qui envoient une surface cubique sur une autre ; ceux-ci devant normaliser le sous-groupe diagonal de $\text{Aut}(S)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, ils sont égaux à une composition de permutations des variables et de matrices diagonales. Les automorphismes obtenus sont alors des composées d'automorphismes de S avec le changement de variable $X \mapsto -X$.

La paramétrisation des classes d'isomorphisme de surfaces de Hirzebruch \mathbb{F}_n est donnée par l'entier n .

Celle des fibrés en coniques exceptionnels est donnée par les points de \mathbb{P}^1 ayant des fibres singulières, modulo l'action de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ (corollaire 4.3.2).

Finalement, celle des $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés exceptionnels est donnée par le triplet de points de ramification (proposition 4.4.6). \square

9. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques donnant des sous-groupes algébriques maximaux

9.1. Fibrés en coniques avec 6 ou 7 fibres singulières sur une surface qui ne soit pas de del Pezzo

Soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques avec k fibres singulières. Le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona, si et seulement si la surface S n'est pas de del Pezzo (théorème 1). Cette dernière condition implique que $k \geq 6$ et est toujours vérifiée si $k \leq 8$ (proposition 4.4.7).

Nous décrivons dans cette section les cas possibles de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques avec 6, 7 fibres singulières. Ceci répond notamment à une question de [DI07, Sect. "What is left?"] sur l'existence de tels groupes d'automorphismes.

La proposition suivante détermine la géométrie des $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques ayant 6 ou 7 fibres singulières qui donnent lieu à des sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona. Nous donnons ensuite un moyen de construire ceux-ci.

Proposition 9.1.1. *Soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques avec k fibres singulières, $k \in \{6, 7\}$, et un triplet de ramification avec $2a_1, 2a_2, 2a_3$ points (avec $k = a_1 + a_2 + a_3$). Alors, le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona si et seulement si on est dans l'une des situations suivantes :*

- (a) *l'un des trois nombres a_i est égal à 1, i.e. $\{a_1, a_2, a_3\}$ est égal à $\{1, 1, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 1, 5\}$, $\{1, 2, 4\}$ ou $\{1, 3, 3\}$.*
- (b) *il existe 4 sections s_0, \dots, s_3 de π , d'auto-intersection -2 , permutées transitivement par $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ et un morphisme birationnel $\eta : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ qui est l'éclatement des points q, p_1, \dots, p_k du plan, qui envoie une fibre générale de π sur une droite passant par q , qui envoie l'ensemble des quatre sections s_0, \dots, s_3 sur un ensemble de quatre courbes à croisements simples transverses, et qui satisfait l'une des assertions suivantes :*
 - (b1) *le morphisme η envoie les sections s_0, \dots, s_3 sur 4 droites ne passant pas par q . De plus, $k = 6$, $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 2, 2\}$ et les points p_1, \dots, p_6 sont les 6 points du plan appartenant à deux des 4 droites.*

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

(b2) *le morphisme η envoie les sections s_0, \dots, s_3 sur trois droites ne passant pas par q et une conique passant par q . De plus, $k = 7$, $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 2, 3\}$, et les points p_1, \dots, p_7 sont 7 des 9 points du plan appartenant à deux des 4 courbes. Les 2 points restants sont alignés avec q .*

Démonstration. D'après le théorème 1, le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona si et seulement si S n'est pas une surface de del Pezzo. La proposition 4.4.7 montre que ceci est vrai si et seulement si une des situations suivantes se présente : (i) une courbe fixée par une involution de $\text{Aut}(S, \pi)$ est rationnelle; (ii) S contient 4 sections d'auto-intersection -2 . La condition (i) est équivalente à ce que $\{a_1, a_2, a_3\}$ contiennent un 1. Comme $a_1 + a_2 + a_3 = k$ (proposition 4.4.6), on retrouve les 5 possibilités décrites en (a).

Supposons maintenant que S contient une section s_0 d'auto-intersection -2 et que $a_1 = a_2 = 2$ (ce qui implique que $a_3 = 2$ si $k = 6$ ou que $a_3 = 3$ si $k = 7$) et démontrons l'existence d'un morphisme birationnel $\eta \rightarrow \mathbb{P}^2$ satisfaisant les conditions de (b), ce qui terminera la preuve.

Notons $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les trois involutions de $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$, qui permutent les composantes de respectivement a_1, a_2 et a_3 fibres singulières et notons $s_i = \sigma_i(s_0)$ pour $i = 1, \dots, 3$. Décomposons l'ensemble des k fibres singulières de π en trois parties disjointes f_1, f_2, f_3 , telles que chacune des composantes de chaque fibre de f_i est laissée invariante par σ_i . En particulier, si $k = 6$ chacune des parties f_i contient deux fibres et si $k = 7$, alors f_1, f_2, f_3 contiennent respectivement 1, 3, 3 fibres.

On construit un morphisme birationnel de fibrés en coniques $\nu : S \rightarrow \mathbb{F}_n$ qui contracte une composante dans chaque fibre singulière de π . Pour cela, on choisit dans chaque f_i une des fibres où l'on contracte la composante qui touche s_0 (et donc aussi s_i) et dans les autres fibres de f_i , on contracte la composante qui ne touche pas s_0 (et donc ne touche pas s_i). En calculant combien de courbes contractées touchent chacune des sections, on voit que s_0, s_1, s_2 sont envoyées sur des sections de \mathbb{F}_n d'auto-intersection 1 et que s_3 est envoyée sur une section d'auto-intersection 1 si $k = 6$ et 3 si $k = 7$. L'existence de sections d'auto-intersection 1 implique que $n = 1$; la contraction de la section d'auto-intersection -1 sur un point $q \in \mathbb{P}^2$ induit un morphisme birationnel $\eta : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ qui envoie une fibre générale de π sur une droite passant par q . Les sections d'auto-intersection 1 (respectivement 3) de \mathbb{F}_1 sont envoyées sur des droites ne passant pas par q (respectivement sur des coniques passant par q). De plus, les k courbes contractées par ν touchant chacune exactement 2 sections, ces k courbes sont envoyées sur des points à l'intersection d'exactly 2 des courbes images. Ceci implique que trois de ces courbes ne s'intersectent pas en un même point. Lorsque $k = 6$, les 4 sections sont envoyées sur 4 droites ne passant pas par q , celles-ci s'intersectent en au plus 6 points, il n'y pas d'intersection triple et on obtient la situation (b1). Lorsque $k = 7$, les courbes images sont 3 droites et une conique, qui ont au plus 9 points d'intersection, 7 étant des intersections transverses (les point p_1, \dots, p_7). Le(s) point(s) d'intersection restant deviennent sur S des points de même type d'intersection où $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ agit. Les 4 sections étant disjointes et permutées transitivement par $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, il doit y avoir 2 points, permutés par $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$, qui donnent sur \mathbb{P}^2 deux points alignés avec q . \square

Rappelons le résultat classique suivant, que nous utiliserons pour montrer l'existence de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques correspondant aux situations (b1) ou (b2) de la proposition 9.1.1.

Lemme 9.1.2. *Soit $\eta : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement des points $q, p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^2$, tels que S soit de del Pezzo et soit $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ la fibration en coniques induite par la projection de \mathbb{P}^2 depuis q .*

Alors, il existe une involution $\sigma \in \text{Aut}(S, \pi)$, qui agit trivialement sur la base de la fibration et qui échange les composantes de chacune des 4 fibres singulières. En notant $E_q = \eta^{-1}(q)$, $E_1 = \eta^{-1}(p_1), \dots, E_4 = \eta^{-1}(p_4)$ et L le transformé d'une droite générale de \mathbb{P}^2 , l'action de σ sur $\text{Pic}(S)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

relativement à la base $(E_q, E_1, E_2, E_3, E_4, L)$. Le transformé strict sur S de la droite passant par deux points de $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ est envoyé par σ sur le transformé strict de la droite passant par les deux autres points.

Démonstration. Notons C la cubique de \mathbb{P}^2 passant par q , et par chaque point p_i , de manière tangente à la droite passant par q et p_i . Notons σ' l'involution birationnelle de \mathbb{P}^2 qui fixe chaque point de C et préserve le pinceau de droites par q . La restriction de σ' à une droite générale passant par q est une involution qui fixe les deux autres points de la droite qui appartiennent à C . Cette construction classique d'involutions de de Jonquières se trouve par exemple dans [BB00, Exemple 2.4c]. Alors, σ' a exactement 5 points-bases, qui sont q, p_1, \dots, p_4 et donc $\sigma = \eta^{-1}\sigma'\eta \in \text{Aut}(S, \pi)$.

Comme C est une courbe elliptique et une bisection de π , elle est ramifiée en 4 points, ce qui implique que σ permute les deux composantes de chacune des 4 fibres singulière de π , donc $\sigma(E_i) = L - E_q - E_i$ pour $i = 1, \dots, 4$. Comme σ est un automorphisme et préserve la fibration on a $\sigma(K_S) = K_S = -3L + E_q + E_1 + \dots + E_4$ et $\sigma(L - E_q) = L - E_q$, ce qui implique la matrice de l'énoncé.

Il existe une unique courbe irréductible de S équivalente à $L - E_1 - E_2$, qui est le transformé strict de la droite passant par p_1 et p_2 , la situation est similaire en prenant deux autres points. La dernière assertion suit donc du calcul direct $\sigma(L - E_1 - E_2) = L - E_3 - E_4$. \square

Démontrons maintenant l'existence de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques correspondant à la situation (b1) de la proposition 9.1.1.

Proposition 9.1.3. *Soit $Q \subset \mathbb{P}^2$ la réunion de 4 droites distinctes, telles que trois ne s'intersectent pas en un même point, et soit $q \in \mathbb{P}^2 \setminus Q$. Notons $\eta : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement de q et des 6 points singuliers de Q .*

Alors, la projection de \mathbb{P}^2 depuis q se remonte à une fibration en coniques $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$, qui est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques. Le transformé strict de Q sur S

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

donne 4 sections disjointes, d'auto-intersection -2 . Le groupe $G = \text{Aut}(S, \pi)$ est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona.

Démonstration. Notons $\Delta \subset Q$ l'ensemble des 6 points singuliers de Q . Cet ensemble contient trois paires : chaque point appartient à 2 droites, on lui associe le point d'intersection des deux autres droites.

L'éclatement de deux paires de Δ et du point q donne une surface de del Pezzo de degré 4. Sur celle-ci, il existe un automorphisme d'ordre 2 qui agit trivialement sur la base de la fibration en coniques induite par la projection de \mathbb{P}^2 depuis q et permute les composantes des 4 fibres singulières (voir le lemme 9.1.2). Cette involution agit sur le transformé strict de Q (lemme 9.1.2) et donc fixe les deux points de la troisième paire. L'involution se remonte alors en un élément de $\text{Aut}(S, \pi)$ qui permute les composantes de 4 fibres singulières.

En faisant ceci pour les trois choix possibles de deux paires, on en déduit que (S, π) est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré exceptionnel. Chaque droite de Q passant par 2 points éclatés par η , le transformé strict de Q sur S donne 4 sections disjointes, d'auto-intersection -2 . La surface n'est donc pas de del Pezzo et alors $\text{Aut}(S, \pi)$ est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona (théorème 1). \square

Nous faisons maintenant de même pour la situation (b2) de la proposition 9.1.1.

Proposition 9.1.4. *Soit $Q \subset \mathbb{P}^2$ un ensemble de trois droites et une conique, tel que trois des quatre courbes ne s'intersectent pas en un même point et que la conique intersecte chaque droite en deux points distincts. Parmi les 9 points singuliers de Q on en choisit deux : d_1, d_2 tels que d_1 soit sur deux droites et d_2 soit sur la 3-ème droite et sur la conique. On note q le point de la conique qui est aligné avec d_1 et d_2 et $\eta : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement de q et des 7 points singuliers de Q qui ne sont ni d_1 ni d_2 (voir la figure 1). Supposons que q n'est pas aligné avec deux points singuliers de Q (hormis d_1 et d_2).*

Alors, la projection de \mathbb{P}^2 depuis q se remonte à une fibration en coniques $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$, qui est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques. Le transformé strict de Q sur S donne 4 sections disjointes, d'auto-intersection -2 . Le groupe $G = \text{Aut}(S, \pi)$ est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona.

Démonstration. Notons L_a et L_b les deux droites de Q qui touchent d_2 , L_c la troisième droite et C la conique. Les 7 points singuliers de Q éclatés par η sont notés $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c$ de la manière suivante : a_1, a_2, a_3 sont sur L_a ; b_1, b_2, b_3 sont sur L_b ; a_3, b_3, c sont sur L_c et a_1, a_2, b_1, b_2, c sont sur C (voir la figure 1).

L'éclatement des points q, a_1, a_2, b_3 et c donne une surface de del Pezzo de degré 4, où il existe un automorphisme σ_a d'ordre 2, qui agit trivialement sur la base de la fibration en coniques induite par la projection de \mathbb{P}^2 depuis q et permute les composantes des 4 fibres singulières (voir le lemme 9.1.2). Alors, σ_a permute les transformés stricts de L_a et L_c (lemme 9.1.2) et permute donc les points d_1 et d_2 et fixe b_3 . La transformée stricte de L_b est envoyée sur la transformée stricte d'une conique D passant par q, a_1, a_2, c (voir la matrice du lemme 9.1.2) ; comme L_b passe par d_2 , la conique D passe par d_1 et est donc égale à C . Les transformés stricts de L_b et C sont donc permutés par σ_a , qui fixe alors b_1 et b_2 . L'involution σ_a se remonte alors à un élément d'ordre 2 de $\text{Aut}(S, \pi)$ qui

Démonstration. La description de \mathcal{CM}_n pour $n \neq 6, 7$ est donnée par la proposition 4.4.7; pour $n = 6, 7$, elle suit des propositions 9.1.1, 9.1.3 et 9.1.4. \square

10. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibrés en coniques tels que le groupe d'automorphismes de la surface ambiante ne soit pas algébrique

Proposition 10.1.1. *Soit (S, π) un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -fibré en coniques, avec un triplé de ramification $\{A_1, A_2, A_3\}$, tel que A_1 et A_2 comptent 4 points et $A_3 = A_1 \cup A_2$ compte 8 points.*

Alors, deux involutions de $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ fixent chacune une courbe elliptique. Les deux courbes elliptiques ne se touchent pas et sont toutes deux équivalentes à $-K_S$; le morphisme anti-canonique induit une fibration elliptique $\eta : S \rightarrow \mathbb{P}^1$, invariante par $\text{Aut}(S)$.

Le groupe $\text{Aut}(S)$ n'est pas un groupe algébrique, alors que le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ — sous-groupe de $\text{Aut}(S)$ — est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona.

Démonstration. Notons $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les trois involutions de $\text{Aut}(S/\mathbb{P}^1)$ fixant respectivement les courbes C_1, C_2, C_3 , ramifiées aux points A_1, A_2, A_3 . Alors, C_1, C_2 et $-K_S$ sont égaux dans $\text{Pic}(S)$ et leur carré est égal à 0 (proposition 4.4.6). Les courbes C_1 et C_2 étant différentes, le système linéaire des courbes équivalentes à $-K_S$ est de dimension projective au minimum 1. Comme $(K_S)^2 = 0$, la dimension est exactement 1 et le morphisme anti-canonique donne une fibration elliptique $\eta : S \rightarrow \mathbb{P}^1$, qui est invariante par $\text{Aut}(S)$ (de manière classique cette surface est une surface de Halphen d'indice 1).

La surface S n'étant pas de del Pezzo, le groupe $\text{Aut}(S, \pi)$ est un sous-groupe algébrique maximal du groupe de Cremona (théorème 1). Il reste à montrer que $\text{Aut}(S)$ n'est pas algébrique. Pour cela, on choisit deux fibres singulières de π et l'on prend une composante dans chaque fibre, ce qui donne deux sections disjointes de η . Alors, la translation de l'une des deux sections sur l'autre est un automorphisme de S , qui est d'ordre infini et qui agit également de manière infinie sur $\text{Pic}(S)$, ce qui termine la preuve. \square

Références

- [Bar06] F. Bars, *On the Automorphisms Groups of Genus 3 curves*, Notes del Seminari de Teoria Nombres UB-UAB-UPC, 2004/05, available at <http://www.mat.uab.es/~francesc/>.
- [BB00] L. Bayle, A. Beauville, *Birational involutions of \mathbb{P}^2* , Asian J. Math. **4** (2000), no. 1, 11–17.
- [Bea96] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, London Math. Soc. Student Texts, Vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Bea07] A. Beauville, *p -Elementary subgroups of the Cremona group*, J. Algebra **314** (2007), no. 2, 553–564.
- [BB04] A. Beauville, J. Blanc, *On Cremona transformations of prime order*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **339** (2004), 257–259.
- [Bla07] J. Blanc, *Finite Abelian subgroups of the Cremona group of the plane*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **344** (2007), 21–26.

JÉRÉMY BLANC

- [Bla07b] J. Blanc, *The number of conjugacy classes of elements of the Cremona group of some given finite order*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), no. 3, 419–434.
- [Bla07c] J. Blanc, *Linearisation of finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane*, à paraître dans Groups Geom. Dyn., [arXiv:0704.0537v1](https://arxiv.org/abs/0704.0537v1).
- [Cor95] A. Corti, *Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 2, 223–254.
- [dFe04] T. de Fernex, *On planar Cremona maps of prime order*, Nagoya Math. J. **174** (2004), 1–28.
- [Dem70] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **3** (1970), 507–588.
- [Dem76] M. Demazure, *Surfaces de Del Pezzo II*, in: *Séminaire sur les singularités des surfaces*, Palaiseau, France, (1976–1977), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 777, Springer-Verlag, New York, 22–70.
- [Dol83] I. V. Dolgachev, *Weyl groups and Cremona transformations*, in: *Singularities I*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 283–294.
- [Dol04] I. V. Dolgachev, *Topics in Classical Algebraic Geometry*, Part I, manuscript in preparation, available at <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/>.
- [DI07] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, à paraître dans *Algebra, Arithmetic, and Geometry—Manin Festschrift*, [arXiv:math/0610595v2](https://arxiv.org/abs/math/0610595v2).
- [E1893] F. Enriques, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniani nel piano*, Rend. Accad. Lincei, 1er sem., 1893.
- [Har87] B. Harbourne, *Rational surfaces with infinite automorphism group and no antipluricanonical curve*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), no. 3, 409–414.
- [Hos97] T. Hosoh, *Automorphism groups of cubic surfaces*, J. Algebra **192** (1997), 651–677.
- [Isk79] В. А. Исковских, *Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями*, Изв. АН СССР, сер. мат. **43** (1979), no. 1, 19–43, 237. Engl. transl.: V. A. Iskovskikh, *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Math. USSR, Izv. **14** (1980), 17–39.
- [Isk96] В. А. Исковских, *Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Моры*, УМН **51** (1996), no. 4 (310), 3–72. English transl.: V. A. Iskovskikh, *Factorization of birational mappings of rational surfaces from the point of view of Mori theory*, Russ. Math. Surv. **51** (1996), no.4, 585–652.
- [Isk05] V. A. Iskovskikh, *On finite subgroups of the Cremona group*, Vietnam J. Math. **33** (2005), Special Issue, 61–80.
- [K1895] S. Kantor, *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*, Mayer & Müller, Berlin, 1895.
- [Kol96] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Bd. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [KM98] J. Kollár, S. Mori, *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [KSC04] J. Kollár, K. Smith, A. Corti, *Rational and Nearly Rational Varieties*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 92, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

SOUS-GROUPES ALGÈBRIQUES DU GROUPE DE CREMONA

- [Man67] Ю. Манин, *Рациональные поверхности над совершенными полями II*, Мат. Сб., нов. сер. **72**(114) (1967), 161–192. English transl: Yu. Manin, *Rational surfaces over perfect fields II*, Math. USSR, Sb. **1** (1967), 141–168.
- [Mor82] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. **116** (1982), no. 1, 133–176.
- [Oda88] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Bd. 15. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [PV89] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов*, Итоги науки и техники, Совр. пробл. матем., Фундам. направл., т. 55, М., ВИНТИ, 1989, стр. 137–314. English transl.: V. L. Popov, E. B. Vinberg, *Invariant theory*, in: *Algebraic Geometry*, Vol. IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 55, Springer-Verlag, Berlin, 1994, pp. 123–284.
- [Seg42] B. Segre, *The Non-Singular Cubic Surfaces*. Oxford University Press, Oxford, 1942.
- [Ser68] J. P. Serre, *Corps Locaux* Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII, Hermann, Paris, 1968.
- [Sum74] H. Sumihiro, *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 1–28.
- [Ume80] H. Umemura, *Sur les sous-groupes algébriques primitifs du groupe de Cremona à trois variables*, Nagoya Math. J. **79** (1980), 47–67.
- [Ume82] H. Umemura, *Maximal algebraic subgroups of the Cremona group of three variables. Imprimitve algebraic subgroups of exceptional type*, Nagoya Math. J. **87** (1982), 59–78.
- [Um82b] H. Umemura, *On the maximal connected algebraic subgroups of the Cremona group*, I, Nagoya Math. J. **88** (1982), 213–246.
- [Ume85] H. Umemura, *On the maximal connected algebraic subgroups of the Cremona group*, II, in: *Algebraic Groups and Related Topics* (Kyoto/Nagoya, 1983), Adv. Stud. Pure Math., Vol. 6, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 349–436.
- [Ros56] M. Rosenlicht, *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math. **78** (1956), 401–443.
- [Wei55] A. Weil, *On algebraic groups of transformations*, Amer. J. Math. **77** (1955), 355–391.
- [W1896] A. Wiman, *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene*, Math. Ann. **48** (1896), 195–240.