BULLETIN OF THE BRAZILIAN MATHEMATICAL SOCIETY

Bull Braz Math Soc, New Series 39(1), 61-80

Sur un théorème de Castelnuovo

Jérémy Blanc, Ivan Pan* et Thierry Vust

Résumé. Nous poursuivons l'étude faite par G. Castelnuovo en 1892 au sujet du groupe des transformations birationnelles du plan complexe qui fixent points par points une courbe de genre > 1 ; nous nous servons comme lui des systèmes linéaires adjoints de la courbe fixe. Nous démontrons que ces groupes sont abéliens, et qu'ils sont soit finis, d'ordre 2 ou 3, soit conjugués à un sous-groupe du groupe de de Jonquières. Nous montrons également que ces résultats ne se généralisent pas aux courbes de genre ≤ 1.

Mots-clés: transformations de Cremona, transformations birationnelles, courbes fixes, courbes de genre supérieur, systèmes linéaires adjoints, transformations de de Jonquières.

Abstract. We continue the study of G. Castelnuovo on the group of birational transformations of the complex plane that fix each point of a curve of genus > 1 ; we use adjoint linear system of the curve as Castelnuovo does. We prove that these groups are abelian, and that these are either finite, of order 2 or 3, or conjuguate to a subgroup of the de Jonquières group. We show also that these results do not generalise to curves of genus ≤ 1.

Keywords: Cremona transformations, birational transformations, fixed curves, curves of high genus, adjoint linear system, de Jonquières transformations.

Mathematical subject classification: 14E07, 14J26, 14H50.

1 Introduction

On désigne par $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ le plan projectif sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; une transformation de Cremona de $\mathbb{P}^2$ est une application birationnelle $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ et on dit qu'une telle transformation est de de Jonquières si elle préserve un pinceau de droites. L'ensemble des transformations de Cremona forme un groupe, appelé groupe de Cremona.

Received 23 November 2006.

*Partiellement soutenu par le CNPq-Brasil et la Section de Mathématiques de l'Université de Genève.

L'origine de ce travail est l'envie de comprendre le très beau théorème de G. Castelnuovo [Cas] :

> *Se una transformazione Cremoniana fra due piani sovrapposti muta in sè stesso ciascun punto di una curva irreduttibile C di genere superiore ad 1, la transformazione o è riduttibile al tipo Jonquières, oppure è ciclica di* $2°$*,* $3°$ *o* $4°$ *grado*[1].

Il affirme en particulier : une transformation de Cremona d'ordre infini qui fixe points par points une courbe irréductible de genre (géométrique) > 1 est conjuguée à une transformation de de Jonquières. C'est ce résultat qui est peut-être le plus intéressant puisque on n'a que peu de prise sur les transformations d'ordre infini.

Dans cette note nous démontrons une version un peu plus précise du théorème de Castelnuovo :

Théorème 1.1. *Soit* $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ *une transformation de Cremona différente de l'identité qui fixe points par points une courbe irréductible de genre* > 1. *Alors* F *est conjuguée à une transformation de de Jonquières ou bien* F *est d'ordre 2 ou 3. De plus, dans le premier cas, si* F *est d'ordre fini, c'est une involution.*

Rappelons les exemples suivants.

Exemples 1.2. ([Hud], [God], [Coo], [SeRo], [BaBe], [dFe], [Bla1]).

a) Les involutions de Geiser fixent une courbe non hyperelliptique de genre 3.
b) Les involutions de Bertini fixent une courbe non hyperelliptique de genre 4 à modèle lisse sur un cône quadratique.
c) Les involutions de de Jonquières fixent une courbe hyperelliptique.

Exemple 1.3. ([dFe], [DoIs], [Bla1]). Dans l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(3, 1, 1, 2)$ considérons une surface lisse S d'équation $w^2 = z^3 + F_6(x, y)$ où F_6 est homogène de degré 6 : c'est un type particulier de surfaces de Del Pezzo de degré 1. La restriction de $(w : x : y : z) \mapsto (w : x : y : \omega z)$, où $\omega \neq 1$ est une racine cubique de l'unité, définit un automorphisme de S d'ordre 3 dont l'ensemble des points fixes contient une courbe irréductible de genre 2.

Voici encore un autre type d'exemple.

[1] Traduction littérale : *Si une transformation Cremonienne entre deux plans superposés envoie sur eux-mêmes chaque point d'une courbe irréductible C de genre supérieur à 1, la transformation ou bien est réductible au type Jonquières, ou alors est cyclique du* $2°$*,* $3°$ *ou* $4°$ degré.

Exemple 1.4. Soit $h \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme de degré $2g+2$ sans racines multiples. Notons J_h le tore de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ image du sous-groupe

$$T_h := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & ha_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{C}(x), a_1^2 - ha_2^2 \neq 0 \right\}$$

de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}(x))$.

Alors, pour tout $A \in T_h$, en désignant par a l'image de A dans J_h, l'application rationnelle $F_a : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ définie par

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{a_1 y + ha_2}{a_2 y + a_1} \right)$$

est de de Jonquières et laisse fixe la courbe hyperelliptique C d'équation $(y^2 = h(x))$. Lorsque $a_1 = 0$, on retrouve l'Exemple 1.2c).

On observe que T_h est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{C}(C)^*$ du corps $\mathbb{C}(C)$ des fonctions rationnelles sur C et donc que J_h est isomorphe à $\mathbb{C}(C)^*/\mathbb{C}(x)^*$.

En fait, les Exemples 1.2, 1.3 et 1.4 décrivent tous les types de transformations étudiées par Castelnuovo, et ceci même lorsqu'on étend la recherche à des sous-groupes du groupe de Cremona, comme l'énonce le Théorème 1.5 ci-dessous.

Si $p \in \mathbb{P}^2$, on désigne par $\mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$ le groupe des transformations de de Jonquières en p, c'est-à-dire celles qui stabilisent le pinceau des droites par p. Évidemment, si $q \in \mathbb{P}^2$, le groupe $\mathrm{Jon}_q(\mathbb{P}^2)$ est conjugué à $\mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$ dans le groupe de Cremona ; pour alléger on écrira $\mathrm{Jon}(\mathbb{P}^2)$.

Théorème 1.5. *Soit $M \neq \{id\}$ un sous-groupe du groupe de Cremona de $\mathbb{P}^2$; supposons qu'il existe une courbe irréductible C de genre > 1 qui est laissée fixe points par points par tous les éléments de M. Alors M est cyclique d'ordre 2 ou 3 engendré par l'une des transformations des Exemples* 1.2, 1.3, *ou bien M est conjugué à un sous-groupe de J_h (Exemple* 1.4*) ; en particulier si M est infini, C est hyperelliptique et M est abélien conjugué à un sous-groupe de* $\mathrm{Jon}(\mathbb{P}^2)$.

Notre démarche suit exactement celle de Castelnuovo qui consiste à montrer qu'il existe un pinceau de courbes rationnelles ou elliptiques qui est laissé fixe par la transformation F dans l'énoncé du Théorème 1.1 (resp. par toute $\mu \in M$ dans 1.5). Ce pinceau est obtenu en construisant les *systèmes linéaires adjoints successifs* de la courbe de points fixes de F. Cette méthode est également décrite dans les livres de L. Godeaux [God, chap. VIII, §2][2] et de J.L. Coolidge [Coo,

[2] Citation du théorème de Castelnuovo selon [God] : *Si une transformation birationnelle possède une courbe unie irréductible (ou une partie irréductible de la courbe unie) de genre supérieur à l'unité, elle peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une transformation de Jonquières, ou c'est une transformation cyclique de période deux, trois ou quatre.*

Book IV, chap. VII, §3, Thm. 14][3]

Lorsque M est fini, l'existence de ce pinceau se démontre aussi avec des méthodes plus modernes. En effet, pour commencer on observe qu'il existe une surface rationnelle lisse S et une application birationnelle $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ telle que $\varphi^{-1}\mu\varphi$ est un automorphisme birégulier de S, ceci pour tout $\mu \in M$ ([dFE], [DoIs]). On peut donc supposer que M est un sous-groupe d'automorphismes de S et de plus qu'on se trouve dans l'une des situations suivantes ([Isk], [DoIs]) :

1) il existe un fibré en coniques $\pi : S \to \mathbb{P}^1$ et un homomorphisme

$$M \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1),\ \mu \mapsto \overline{\mu}$$

tel que $\pi \circ \mu = \overline{\mu} \circ \pi$;

2) S est une surface de Del Pezzo.

Dans le premier cas, puisque M fixe une courbe C de genre ≥ 1, on a $\overline{\mu} = id$ pour tout $\mu \in M$: autrement dit M fixe un pinceau de courbes rationnelles.

Dans le second cas, considérons l'application rationnelle anticanonique

$$\gamma : S \dashrightarrow |-K_S|^\vee$$

qui est équivariante. Puisque aucun élément du système anticanonique ne peut contenir C (voir Lemme 2.16), la courbe $\gamma(C)$ engendre $|-K_S|^\vee$ et par conséquent M opère trivialement au but (i.e., d'où l'existence d'un pinceau de courbes elliptiques laissé fixe par M.

Par contre, si M est infini, la méthode des "adjoints successifs" reste d'actualité.

Finalement, nous démontrerons à la dernière section (Proposition 4.1) que les Théorèmes 1.1 et 1.5 ne se généralisent pas aux courbes rationnelles ou elliptiques (de genre 0 ou 1). Pour une étude plus approfondie du cas des courbes elliptiques (fait avec d'autres méthodes, l'utilisation des adjoints étant impossible), voir [Bla2].

Les auteurs remercient le rapporteur pour ses remarques concernant le présent article.

2 Système adjoint

On adoptera la convention suivante : toutes les surfaces considérées sont tacitement supposées projectives lisses, rationnelles et connexes.

[3]Citation du théorème de Castelnuovo selon [Coo] : *If, in a Cremona transformation, there be a curve of fixed points of genus greater than* 1*, the transformation is either equivalent to a De Jonquières transformation, or periodic with a period of two, three, four, or six.*

Soit C une courbe irréductible contenue dans la surface X et $\pi : Y \to X$ une résolution plongée des singularités de C ; notons $\widetilde{C}$ la transformée stricte inverse de C par π. Si $h^0(\widetilde{C} + K_Y) > 1$, autrement dit si le système linéaire $|\widetilde{C} + K_Y|$ n'est pas vide ni réduit à un seul diviseur, on note $\mathrm{Adj}(C)$ le système linéaire $\pi_*|\widetilde{C} + K_Y|$ privé de ses éventuelles composantes fixes : c'est le *système adjoint* de C. Ce système est indépendant de la résolution choisie : soient en effet $\pi_i : Y_i \to X$ $(i = 1, 2)$ deux résolutions de C ; considérons alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "\sigma_2"] & \\ Y_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

où σ_i $(i = 1, 2)$ sont des morphismes birationnels, et notons $\widetilde{C}_i$, $\widetilde{C}$ les transformées strictes inverses de C par π_i et $\pi_i \circ \sigma_i$ respectivement. Soit maintenant $D_i \in |\widetilde{C}_i + K_{Y_i}|$ et supposons pour simplifier que σ_i est l'éclatement d'un point O_i ; alors le transformé total $\sigma_i^* D_i$ de D_i appartient à $|\widetilde{C} + m_i E_i + K_Y - E_i|$ où E_i désigne la fibre exceptionnelle de σ_i et $m_i \in \{0, 1\}$ la multiplicité de $\widetilde{C}_i$ en O_i ; par conséquent $\sigma_i^* D_i + (1 - m_i) E_i \in |\widetilde{C} + K_Y|$ et donc $D_i \in (\sigma_i)_*|\widetilde{C} + K_Y|$. En décomposant σ_i en une succession d'éclatements, on démontre ainsi que

$$(\sigma_i)_*|\widetilde{C} + K_Y| = |\widetilde{C}_i + K_{Y_i}|$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} (\pi_1)_*|\widetilde{C}_1 + K_{Y_1}| &= (\pi_1\sigma_1)_*|\widetilde{C} + K_Y| \\ &= (\pi_2\sigma_2)_*|\widetilde{C} + K_Y| \\ &= (\pi_2)_*|\widetilde{C}_2 + K_{Y_2}|. \end{aligned}$$

Insistons sur le fait que si $h^0(\widetilde{C} + K_Y) \leq 1$, alors le système linéaire adjoint de C n'existe pas, par définition. En général, lorsqu'on parlera de système linéaire, il est sous-entendu que celui-ci contient au moins un pinceau, c'est-à-dire un système linéaire de dimension 1.

Proposition 2.1. *Le système adjoint* $\mathrm{Adj}(C)$ *existe si et seulement si* $g(C) > 1$. *De plus, dans ce cas, l'intersection avec* C *induit un isomorphisme* $\mathrm{Adj}(C) \simeq |K_C|$.

Ici $g(C)$ désigne le genre de la normalisation $\widetilde{C}$ de C et K_C l'image par $\pi : \widetilde{C} \to C$ d'un diviseur canonique sur $\widetilde{C}$.

Démonstration. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-\widetilde{C}) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{C}} \longrightarrow 0$$

qui, après tensorisation avec $\mathcal{O}_Y(\widetilde{C} + K_Y)$ induit la suite exacte

$$\cdots \ \mathrm{H}^0(Y, K_Y) \longrightarrow \mathrm{H}^0(Y, \widetilde{C} + K_Y) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\widetilde{C}, K_{\widetilde{C}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y, K_Y) \longrightarrow \cdots$$

(pour simplifier les notations, dans les groupes de cohomologie nous identifions les diviseurs à leurs faisceaux associés). Puisque Y est rationnelle les deux termes extrêmes sont réduits à $\{0\}$, d'où le résultat. $\square$

Exemple 2.2. Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible de degré d, avec des singularités $p_1, \ldots, p_\ell$, de multiplicités $m_1, \ldots, m_\ell \geq 2$ respectivement ($\ell \geq 0$). Supposons que $g(C) \geq 2$; observons qu'alors d est au moins égal à 4.

a) Si toutes les singularités $p_1, \ldots, p_\ell$ sont ordinaires, une résolution plongée des singularités de C est obtenue en prenant pour $\pi : Y \to \mathbb{P}^2$ l'éclatement de $p_1, \ldots, p_\ell$ dans $\mathbb{P}^2$. Alors $\mathrm{Adj}(C)$ est le système linéaire

$$\pi_* \left| (d-3)L - \sum_{i=1}^{\ell} (m_i - 1)E_i \right|$$

privé de ses composantes fixes, où L désigne l'image inverse par π d'une droite générale et E_i est la courbe exceptionnelle au dessus de p_i. C'est le système linéaire des courbes de degré $d-3$ qui passent par p_i avec multiplicité $m_i - 1$ ($i = 1, \ldots, \ell$), privé de ses composantes fixes.

b) Supposons que C possède des singularités non ordinaires. Toute résolution plongée π de C se factorise à travers l'éclatement de $p_1, \ldots, p_\ell$ dans $\mathbb{P}^2$, mais elle peut être différente de celui-ci. Néanmoins, si la résolution est minimale, $\mathrm{Adj}(C)$ est un système linéaire de la forme

$$\pi_* \left| (d-3)L - \sum_{i=1}^{\ell} (m_i - 1)E_i - \sum a_{ij} F_{ij} \right|$$

privé de ses composantes fixes, où F_{ij} est un diviseur effectif contracté par π sur p_i et $a_{ij} > 0$.

Remarque 2.3. Comme il suit de l'exemple précédent, lorsque C est une courbe plane, le degré des éléments de $\mathrm{Adj}(C)$ est $\leq \deg(C) - 3$.

Exemple 2.4.

a) Soit $C = C_{g+2} \subset \mathbb{P}^2$ une courbe générale de degré $g + 2 \geq 2$ avec un point singulier ordinaire p de multiplicité g (donc $g(C) = g$). Si $g \leq 1$ le système $\mathrm{Adj}(C)$ n'existe pas et si $g \geq 2$, il est constitué de $(g - 1)$ droites passant par p.

b) Si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une sextique avec deux points triples ordinaires p et q, alors, $\mathrm{Adj}(C)$ est obtenu à partir du système des cubiques avec point double en p et q en suprimant la droite pq qui est une composante fixe : ainsi $\mathrm{Adj}(C)$ est le système linéaire des coniques passant par p et q.

c) Le système linéaire $\mathcal{D}$ des cubiques planes passant par un ensemble I de 7 points en position générale définit une application rationnelle $\gamma : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ de degré 2, l'involution correspondante σ étant une involution de Geiser. Considérons l'éclatement $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ de I : alors $\sigma' := \pi^{-1}\sigma\pi$ est un automorphisme de X (c.f. [BaBe]). Puisque le groupe des classes de diviseurs sur X invariants par σ' est engendré par K_X, la courbe C des points fixes de σ est de degré $3d$ avec multiplicité d en les points de I. Par ailleurs, la restriction de γ à un membre général D de $\mathcal{D}$ est un revêtement double $D \to \mathbb{P}^1$ ramifié en 4 points puisque $g(D) = 1$. Ainsi l'intersection libre de C et D est constituée de 4 points, d'où aussitôt $d = 2$: la courbe C des points fixes de l'involution de Geiser est donc une sextique avec points doubles ordinaires en les 7 points de I et $\mathrm{Adj}(C)$ est le système linéaire des cubiques passant par I.

d) Le système linéaire $\mathcal{D}$ des sextiques planes singulières sur un ensemble J de 8 points en position générale définit une application rationnelle $\gamma : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow Q \subseteq \mathbb{P}^3$ de degré 2, où Q est un cône quadratique, l'involution correspondante étant une involution de Bertini σ. Comme ci-dessus on observe que la courbe des points fixes de σ est de degré $3d$ avec multiplicité d sur J. La restriction de γ à un membre général D de $\mathcal{D}$ est un revêtement double $D \to \mathbb{P}^1$ ramifié en 6 points puisque $g(C) = 2$ et par conséquent $d = 3$: la courbe C des points fixes de l'involution de Bertini est une nonique avec points triples en les 8 points de J et $\mathrm{Adj}(C)$ est le système linéaire des sextiques singulières sur J.

Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux surfaces (lisses et rationnelles). Si $D \subset X_1$ est une courbe dont aucune composante n'est contractée par φ, nous notons $\widetilde{\varphi}(D)$ la transformée stricte directe de D par φ, et, si $\mathcal{H}$ est un système linéaire sur X_1 sans composante fixe, $\widetilde{\varphi}(\mathcal{H})$ désigne le système linéaire sur X_2 engendré par les $\widetilde{\varphi}(D)$ où $D \in \mathcal{H}$ est un élément général de $\mathcal{H}$. Par construction $\widetilde{\varphi}(\mathcal{H})$ n'a pas de composantes fixes ; il s'appelle le *transformé homaloïdal* de $\mathcal{H}$ par φ. On peut aussi le définir via une résolution de l'indétermination de φ

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "\sigma_2"] & \\ X_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & X_2 \end{tikzcd} \tag{1}$$

où σ_1, σ_2 sont des morphismes birationnels : $\widetilde{\varphi}(\mathcal{H})$ est le système linéaire $(\sigma_2)_*\sigma_1^*\mathcal{H}$ privé de ses éventuelles composantes fixes.

La propriété fondamentale du système adjoint est sa “covariance” relativement aux transformations de Cremona ; elle joue un rôle important dans la littérature classique lors de l'étude de l'opération du groupe de Cremona dans les systèmes linéaires de courbes planes ([God, chap. VIII], [Coo, Book IV, chap. VII], [ECh, Libro quinto Cap.II]).

Proposition 2.5. *Soient $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux surfaces et $X_1 \supseteq C_1$ une courbe irréductible telle que $g(C_1) > 1$. Alors*

$$\widetilde{\varphi}(\mathrm{Adj}(C_1)) = \mathrm{Adj}(\widetilde{\varphi}(C_1)).$$

Démonstration. Considérons un triangle commutatif comme dans le diagramme (1) ; sans perdre de généralité, on peut supposer que σ_1 résoud les singularités de C_1 et donc que σ_2 résoud celles de $\widetilde{\varphi}(C_1)$. (On observe que de l'hypothèse $g(C_1) > 1$ suit que $\widetilde{\varphi}(C_1)$ est bien définie). Notons $\widetilde{C}$ la transformée stricte inverse de C_1 par σ_1 (ou de $\widetilde{\varphi}(C_1)$ par σ_2). Par définition, à composantes fixes près, on a

$$(\sigma_1)_*|\widetilde{C} + K_Y| = \mathrm{Adj}(C), \quad (\sigma_2)_*|\widetilde{C} + K_Y| = \mathrm{Adj}(\widetilde{\varphi}(C_1)),$$

d'où suit l'assertion. $\square$

Soit $\mathcal{H}$ un système linéaire sur une surface X. Nous noterons

$$\alpha_{\mathcal{H}} : X \dashrightarrow \mathcal{H}^{\vee}$$

l'application rationnelle associée à $\mathcal{H}$. Dans le cas où $\mathcal{H} = \mathrm{Adj}(C)$ on écrira α_C au lieu de $\alpha_{\mathrm{Adj}(C)}$.

Soit $X \supseteq C$ une courbe irréductible avec $g(C) > 1$; d'après la Proposition 2.1 on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "\alpha_C"] & & \mathrm{Adj}(C)^\vee \\
& C \arrow[ul, hook] \arrow[ur, dashed, "\gamma_C"'] &
\end{tikzcd}$$

où γ_C est "l'application canonique" de C, c'est-à-dire que γ_C précédée de la normalisation $\widetilde{C} \to C$ est le morphisme canonique de $\widetilde{C}$.

Le résultat suivant est une conséquence directe de la Proposition 2.5.

Corollaire 2.6. *Soient $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application birationnelle entre deux surfaces et $X_1 \supseteq C_1$ une courbe irréductible telle que $g(C_1) > 1$; notons $C_2 = \widetilde{\varphi}(C_1)$. Alors, il existe un isomorphisme $\phi : \mathrm{Adj}(C_1)^\vee \to \mathrm{Adj}(C_2)^\vee$ qui rend commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dd, dashed, "\alpha_{C_1}"] & & X_2 \arrow[dd, dashed, "\alpha_{C_2}"] \\
C_1 \arrow[ur, hook] \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, dashed, "\gamma_{C_1}"] & & C_2 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, dashed, "\gamma_{C_2}"] & \\
& \mathrm{Adj}(C_1)^\vee \arrow[rr, "\phi"] & & \mathrm{Adj}(C_2)^\vee .
\end{tikzcd}$$

□

On dit qu'un système linéaire sur une surface X est *réductible* s'il est composé de diviseurs réductibles ; sinon, on dit qu'il est *irréductible*.

Proposition 2.7. *Soit $\mathcal{H}$ un système linéaire irréductible sur une surface X. Alors* $\mathrm{Adj}(H)$ *ne dépend pas du choix de H général dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration. En effet, après un éclatement convenable et une suppression éventuelle de composantes fixes, on peut supposer que $\mathcal{H}$ est sans points-base ; dans ce cas les membres généraux de $\mathcal{H}$ sont lisses d'après le théorème de Bertini [Har, Chap. III, Cor. 10.9]. □

Cette proposition permet de définir le *système adjoint* $\mathrm{Adj}(\mathcal{H})$ d'un système linéaire irréductible $\mathcal{H}$: il s'agit simplement de $\mathrm{Adj}(H)$ pour H général dans $\mathcal{H}$.

Le résultat ci-dessous suit immédiatement de la Proposition 2.5.

Corollaire 2.8. *Soit M un groupe de transformations birationnelles de la surface X et $\mathcal{H}$ un système linéaire irréductible sur X. Si $\mathcal{H}$ est stable par M (c'est-à-dire $\widetilde{\mu}(H) \in \mathcal{H}$ pour tout H général dans $\mathcal{H}$ et $\mu \in M$), alors* $\mathrm{Adj}(\mathcal{H})$ *est aussi stable par M.* □

Dans la terminologie classique, on dit qu'un système linéaire $\mathcal{L}$ sans composantes fixes et réductible est *composé avec un pinceau $\mathcal{L}^c$* : rappelons ce dont il s'agit.

Lemme 2.9. *Soit $\mathcal{L}$ un système linéaire sans composantes fixes et réductible. Alors il existe un unique pinceau irréductible $\mathcal{L}^c$ tel que tout élément de $\mathcal{L}$ est composé d'une somme d'éléments de $\mathcal{L}^c$; l'application $\alpha_{\mathcal{L}}$ associée à $\mathcal{L}$ se factorise en*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\alpha_{\mathcal{L}^c}"] \arrow[dr, dashed, "\alpha_{\mathcal{L}}"'] & & (\mathcal{L}^c)^\vee \simeq \mathbb{P}^1 \arrow[dl] \\ & \mathcal{L}^\vee & \end{tikzcd} .$$

Démonstration. Quitte à remplacer X par un éclaté convenable, on peut supposer que $\alpha_{\mathcal{L}}$ est un morphisme. D'après le théorème de Bertini ([Iit, §7.9]), $\alpha_{\mathcal{L}}(X)$ est une courbe.

Considérons maintenant la factorisation de Stein de $\alpha_{\mathcal{L}}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathcal{L}}"'] & & W \arrow[dl] \\ & \alpha_{\mathcal{L}}(X) & \end{tikzcd}$$

où W est une courbe normale (donc lisse) et les fibres de β sont connexes ([Iit, §2.13 et 2.14]) et en général lisses ([Iit, §7.9]). Puisque X est rationnelle, W est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ de sorte que les fibres de β constituent le pinceau cherché. □

Lemme 2.10. *Soit $\mathcal{H}$ un système linéaire irréductible sur la surface X. Alors tous les membres de $\mathcal{H}$ sont connexes (c'est-à-dire que leurs supports le sont).*

Démonstration. Lorsque $\dim\, \alpha_{\mathcal{H}}(X) = 2$ le résultat est bien connu : voir [Laz, Chap. I. §3.3].

Supposons donc que $\alpha_{\mathcal{H}}(X)$ soit une courbe : par irréductibilité, $\mathcal{H}$ est un pinceau et alors en utilisant la factorisation de Stein de $\alpha_{\mathcal{H}}$, on voit que les fibres de $\alpha_{\mathcal{H}}$, c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{H}$, sont connexes. □

Soit $\mathcal{H}$ un système linéaire irréductible sur X. On se propose de définir les *adjoints successifs* de $\mathcal{H}$. Supposons donc que $\mathrm{Adj}(\mathcal{H})$ existe ; s'il est irréductible on pose $\mathrm{Adj}(\mathcal{H})^{(1)} = \mathrm{Adj}(\mathcal{H})$ et sinon $\mathrm{Adj}(\mathcal{H})^{(1)} = \mathrm{Adj}(\mathcal{H})^c$. Ensuite on définit $\mathrm{Adj}(\mathcal{H})^{(n)} = \mathrm{Adj}\left(\mathrm{Adj}(\mathcal{H})^{(n-1)}\right)^{(1)}$. Par construction les systèmes linéaires $\mathrm{Adj}(\mathcal{H})^{(i)}$ sont irréductibles.

Proposition 2.11. *Soit $\mathcal{H}$ un système linéaire irréductible sur X. Il existe $d \geq 0$ tel que $\mathrm{Adj}(\mathcal{H})^{(i)}$ n'existe pas pour $i > d$.*

Démonstration. Soit $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une application birationnelle. D'après la Proposition 2.5, en tenant compte du Lemme 2.9, si $\mathrm{Adj}(\mathcal{H})^{(i)}$ existe alors

$$\widetilde{\varphi}(\mathrm{Adj}(\mathcal{H})^{(i)}) = \mathrm{Adj}(\widetilde{\varphi}(\mathcal{H}))^{(i)},$$

ce qui ramène au cas où $X = \mathbb{P}^2$. Mais nous savons (Remarque 2.3) que $\deg \mathrm{Adj}(\mathcal{H})^{(1)} \leq \deg \mathcal{H} - 3$ lorsque $X = \mathbb{P}^2$, d'où aussitôt le résultat. □

Proposition 2.12. *Soit M un groupe de transformations birationnelles de X. Supposons qu'il existe une courbe irréductible C de genre > 1 telle que $\widetilde{\mu}(C) = C$ pour tout $\mu \in M$. Il existe alors un système linéaire irréductible $\mathcal{H}$ de dimension ≥ 1 sur X, stable par M et tel que $g(H) \leq 1$ pour tout H général dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Partant de C on construit la suite des adjoints $\mathrm{Adj}(C)^{(1)}$, $\mathrm{Adj}(C)^{(2)}, \ldots$ dont le dernier convient d'après la Proposition 2.1. □

Exemples 2.13.

a) Soit $C \subseteq X$ une courbe hyperelliptique de genre > 1 constituée de points fixes d'un automorphisme σ qui est une involution de de Jonquières. On sait que la paire (X, C) est birationnellement équivalente à $(\mathbb{P}^2, C_{g+2})$, où C_{g+2} est une courbe irréductible de degré $g+2$ avec un point singulier ordinaire g-uple (c.f. [BaBe]). Par conséquent $\mathrm{Adj}(C)^{(1)}$ est un pinceau de courbes rationnelles.

Considérons maintenant le groupe M_C des transformations birationnelles μ de X telles que $\widetilde{\mu}(C) = C$: ce groupe stabilise le pinceau $\mathrm{Adj}(C)^{(1)}$ et par conséquent est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{Jon}(\mathbb{P}^2)$.

On peut aussi raisonner directement : quitte à effectuer une contraction, on peut supposer que (X, σ) est minimale ; alors il existe un fibré en coniques $r : X \to \mathbb{P}^1$ tel que $r \circ \sigma = r$. De plus le sous-groupe des invariants de σ dans le groupe de Picard de X est de rang 2 engendré par K_X et la classe f d'une fibre de r ; on a donc $C \equiv aK_X + bf$ avec $a = -1$ puisque $C \cdot f = 2$ et $K_X \cdot f = -2$; par conséquent $\mathrm{Adj}(C)^{(1)} = |f|$ et le pinceau cherché n'est rien d'autre que le pinceau associé à r.

b) Considérons le système bi-anticanonique $|-2K_S|$ d'une surface de Del Pezzo S de degré 1 : un membre général D de ce système est de genre 2 et donc est hyperelliptique ; de plus $\mathrm{Adj}(|-2K_S|) = |-K_S|$ est un pinceau de courbes dont l'élément général est de genre 1.

La théorie des adjoints montre ici que la paire (X, C) de (a), lorsque $g = 2$, n'est pas birationnellement équivalente à la paire (S, D) de (b).

Remarque 2.14. Partant d'un système linéaire sur X qui est stable par M, on a la même conclusion que dans la Proposition 2.12. Dans la littérature classique, ce résultat est la clé pour la classification des sous-groupes "continus" du groupe de Cremona : voir [Coo, Book IV, chap. VIII], [ECh, Libro quinto, §22]. Mais cela s'applique aussi aux groupes finis : si M est une sous-groupe fini d'automorphismes de X, l'image réciproque par l'application canonique $X \to X/M$ d'un système linéaire ample, par exemple, est irréductible et stable par M. Avec la méthode des adjoints successifs, on montre que M stabilise un système linéaire irréductible dont les éléments généraux sont de genre ≤ 1 ; cette réduction est semblable à celle à laquelle on a fait allusion dans l'introduction et qui est issue de la théorie des contractions des rayons extremaux du cône $\overline{NE(X)}$ des courbes sur X (c.f. [KoMo, §2.18]).

Soit $\varphi : X \dashrightarrow X$ une application birationnelle. Un point $x \in X$ est un *point fixe* de φ si φ est définie en x et $\varphi(x) = x$: on notera $\mathrm{Fix}(\varphi)$ l'adhérence dans X de l'ensemble des points fixes par φ.

On dit qu'une application rationnelle $p : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ est une *fibration rationnelle* (resp. *elliptique*) si la fibre générale de p est une courbe rationnelle (resp. elliptique)

Le résultat suivant constitue la première étape de la preuve du théorème de Castelnuovo.

Corollaire 2.15. *Soit M un groupe de transformations birationnelles de la surface X. Supposons qu'il existe une courbe irréductible C de genre > 1 telle que $C \subset \mathrm{Fix}(\mu)$ pour tout $\mu \in M$. Il existe alors une fibration rationnelle ou elliptique $p : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ telle que $p \circ \mu = p$ pour tout $\mu \in M$.*

Démonstration. Considérons un système linéaire $\mathcal{H}$ comme dans la proposition et l'application rationnelle $\alpha_{\mathcal{H}} : X \dashrightarrow \mathcal{H}^\vee$ correspondante qui est équivariante. En utilisant le lemme ci-dessous, on observe que $\alpha_{\mathcal{H}}(C)$ engendre $\mathcal{H}^\vee$ puisque aucun élément de $\mathcal{H}$ ne peut contenir C qui est de genre > 1 par hypothèse. Maintenant, comme C est fixe, le groupe M opère trivialement au but, c'est-à-dire que toute courbe de $\mathcal{H}$ est laissée invariante par tout élément de M. On obtient l'assertion en choisissant un pinceau dans le système $\mathcal{H}$. □

Lemme 2.16. *Soient $\mathcal{H}$ un système linéaire irréductible sur X et C une courbe irréductible contenue dans le support d'un élément de $\mathcal{H}$. Alors le genre d'un élément général de $\mathcal{H}$ est $\geq g(C)$.*

Démonstration. Quitte à effectuer des éclatements, on peut supposer que $\mathcal{H}$ est sans points-base et que C est lisse ; en particulier un élément général H de $\mathcal{H}$ est aussi lisse. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(C + K_X) \longrightarrow \mathcal{O}(H + K_X)$$

il suit que $\dim |C + K_X| \leq \dim |H + K_X|$; de plus, la restriction de ces deux systèmes linéaires à C et H respectivement, définissent les séries canoniques de ces deux courbes, d'où l'assertion. □

Exemple 2.17. Considérons l'involution de Bertini (Exemple 2.4d) dont la courbe C des points fixes est une nonique avec points triples situés sur un ensemble J de 8 points en position générale. Ici le pinceau cherché est $\mathrm{Adj}(C)^{(2)}$ qui est constitué des cubiques passant par J.

3 Preuve du théorème de Castelnuovo

Soit F une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas l'identité. Supposons que $\mathrm{Fix}(F)$ contienne une courbe C de genre > 1. On sait qu'il existe une fibration rationnelle ou elliptique $p : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ telle que $F \circ p = p$ (Corollaire 2.15). Soit $\sigma : X \to \mathbb{P}^2$ un morphisme birationnel tel que $q := p \circ \sigma$ est un morphisme ; posons $G := \sigma^{-1} F \sigma$.

Si p est rationnelle, d'après le théorème de Noether-Enriques ([Bea, Thm. III.4]) il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{P}^1$ tel que

$$\begin{tikzcd} q^{-1}(U) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "q"'] & & U \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

d'où suit que F est conjuguée à une transformation de de Jonquières. Comme la courbe C n'est pas rationnelle et $F \neq id$, on en déduit que la restriction de G à l'une des fibres générales de q fixe exactement deux points : il s'ensuit que q présente C comme revêtement à deux feuilles de $\mathbb{P}^1$, et donc que C est hyperelliptique. De plus, il existe $a \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}(x))$ tel que F s'exprime dans des coordonnées affines convenables par

$$F_a : (x, y) \dashrightarrow \left(x, \frac{a_{11}(x)y + a_{12}(x)}{a_{21}(x)y + a_{22}(x)}\right);$$

ici $A = (a_{ij}(x))$ représente a.

Si $(y^2 = h(x))$ est l'équation affine de C, on vérifie directement que F_a fixe C si et seulement si

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & ha_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Le lemme suivant achève de démontrer le théorème lorsque la fibration est rationnelle.

Lemme 3.1. *Si a (ou F_a) est d'ordre fini et si F_a fixe une courbe de genre > 0, alors a (ou F_a) est une involution.*

Démonstration. On observe que la condition sur l'ensemble des points fixes de F_a implique que A n'est pas diagonalisable et donc que le polynôme minimal m_A de A est irréductible dans $\mathbb{C}(x)[T]$.

Notons n l'ordre de a : il existe donc $g \in \mathbb{C}(x)$ tel que $A^n = gI$ (I désigne la matrice identité) et par suite on a $(\det\ A)^n = g^2$.

Si $n = 2d$ est pair, alors $g = f^d$ pour un élément $f \in \mathbb{C}(x)$. Maintenant m_A divise $T^{2d} - g = T^{2d} - f^d$: on a donc $m_A = T^2 - \xi f$ où ξ est une racine $d^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est-à-dire que a est d'ordre 2.

Si n est impair, $g = f^n$ pour un élément $f \in \mathbb{C}(x)$. En effet, choisissons deux entiers u et v tels que $nu + 2v = 1$; on a alors

$$g = g^{un}(g^2)^v = (g^u(\det\ A)^v)^n.$$

Cette fois $T^n - g = T^n - f^n$ se décompose dans $\mathbb{C}(x)[T]$ ce qui n'est pas possible puisque m_A est irréductible et divise $T^n - g$. $\square$

Supposons maintenant que p, et donc q, est elliptique. La restriction G_b de G à une fibre générale X_b de q est un automorphisme admettant au moins 2 points fixes : en effet, la courbe de points fixes C étant de genre > 1 n'est pas contenue dans une fibre de q et la restriction de q à C n'est pas birationnelle. Dans ces conditions, on sait que G_b est d'ordre fini égal à $2, 3, 4$ ou 6 : voir

[Har, Chap. IV, §4.7] ; il s'ensuit que G lui-même est d'ordre 2, 3, 4 ou 6, ce qui permet de supposer, si c'est plus confortable, que G est un automophisme de X.

L'existence de 2 points fixes dans X_b exclut l'ordre 6 : d'après [Har, Chap. IV, §4.20.2], si G est d'ordre 6, alors X_b est isomorphe au quotient de $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Z}[\omega]$ où $\omega = e^{2\pi i/3}$ et G_b est la multiplication par $-\omega$ ou $-\omega^2$ qui n'a qu'un seul point fixe. On observe par contre que l'ordre 3 n'est pas exclu.

Si l'ordre de G est 4, alors la fibre générale X_b est isomorphe au quotient de $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Z}[i]$, où $i^2 = -1$, et G_b est la multiplication par $\pm i$ qui possède exactement 2 points fixes : voir [Har, Chap. IV, §4.20.1]. Ainsi la courbe de points fixes C est hyperelliptique. On observe que C est aussi une courbe de points fixes de l'involution G^2, qui est donc de de Jonquières, de sorte qu'on se trouve dans la situation étudiée dans l'Exemple 2.13a) : il existe une fibration rationnelle r qui est laissée stable par G. Puisque $g(C) > 1$, la restriction de r à C est surjective et alors $G \circ r = r$ ce qui ramène au cas étudié plus haut ; ceci montre que G est d'ordre 2. Cette contradiction implique que l'ordre 4 n'est pas possible.

Considérons maintenant un groupe M de transformations de $\mathbb{P}^2$ dont tous les éléments fixent une même courbe de genre > 1, comme dans le théorème. On sait alors que M fixe une fibration rationnelle ou elliptique. Dans le premier cas M est conjugué à un sous-groupe du groupe de de Jonquières. Dans le second cas, puisque en général le groupe des automorphismes d'une courbe elliptique fixant au moins un point est cyclique d'ordre 2, 3, 4 ou 6, le groupe M lui-même est cyclique ; l'analyse précédente montre alors que seuls les ordres 2 et 3 sont possibles. Les précisions concernant la classe de conjugaison de M dans le groupe de Cremona de $\mathbb{P}^2$ suivent alors de [BaBe], [dFe] ou [Bla1].

4 Remarques finales

Dans cette dernière section, nous démontrons le résultat suivant, qui prouve que les Théorèmes 1.1 et 1.5 ne se généralisent pas aux courbes rationnelles ou elliptiques (de genre 0 ou 1). Nous citons également en toute fin de texte le problème de l'étude du groupe des transformations birationnelles qui laissent globalement invariante une courbe de genre > 1, problème similaire à celui de cet article.

Proposition 4.1. *Soit C une courbe plane qui est l'image d'une droite ou d'une cubique lisse par une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2$. Le groupe des transformations de Cremona qui fixent points par points la courbe C n'est ni d'ordre fini, ni abélien, ni conjugué à un sous-groupe de* $\mathrm{Jon}(\mathbb{P}^2)$.

Remarque 4.2. Ce groupe a été introduit dans [Giz] sous le nom de “groupe d’inertie de C”.

Remarque 4.3. L’hypothèse de l’énoncé impose une restriction sur la courbe : en effet, il existe des courbes rationnelles planes qui ne sont pas l’image d’une droite par une transformation de Cremona, par exemple une sextique avec 10 points doubles (voir [Coo], Book IV, chap. II, §2 ou [KuMu]) ; de même, une sextique avec 9 points doubles est une courbe de genre 1 qui n’est pas l’image d’une cubique lisse par une transformation de Cremona. Ceci peut être vérifié en observant que tout pinceau de courbes rationnelles planes intersecte une sextique avec uniquement des points doubles ordinaires en au minimum 4 points en dehors des points-base (voir le lemme ci-dessous).

Lemme 4.4. *Soit C une sextique plane dont les points singuliers sont des points doubles ordinaires. Soit Λ un pinceau de courbes rationnelles planes.*

Alors, C intersecte une courbe générale de Λ en au minimum 4 points en dehors des points-base.

Démonstration. Notons n le degré des courbes de Λ et $m_1, \ldots, m_k$ les multiplicités des points-base (qui peuvent être sur $\mathbb{P}^2$ ou infiniment proches). La condition de rationalité et le fait que le système soit un pinceau donnent respectivement

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i(m_i-1)}{2} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i(m_i+1)}{2} = 2. \tag{3}$$

En soutrayant l’équation (2) à l’équation (3), on obtient

$$3n - \sum_{i=1}^{k} m_i = 2. \tag{4}$$

.

En notant $P_1, \ldots, P_l$ les points doubles de C et respectivement $n_1, \ldots, n_l$ les multiplicités du pinceau Λ en ces points (qui peuvent être 0 si les points ne sont pas des points-base), la courbe C intersecte une courbe générale de Λ en $6n - 2\sum_{i=1}^{l} n_i = 2(3n - \sum_{i=1}^{l} n_i)$ points en dehors des points-base. Comme $\sum_{i=1}^{l} n_i \leq \sum_{i=1}^{k} m_i$, le résultat suit de l’équation (4). $\square$

Citons quelques exemples :

Exemple 4.5.

a) Soit G le groupe des transformations linéaires de $\mathbb{P}^2$ du type

$$(x:y:z)\mapsto(ax:y+bx:z+cx),$$

où $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$. On voit directement que G fixe (points par points) la droite L de $\mathbb{P}^2$ d'équation $x=0$ (en fait, tout automorphisme linéaire de $\mathbb{P}^2$ qui fixe L appartient à G) et que G n'est ni fini ni abélien. Comme G est un groupe de transformations linéaires et comme ses seuls points fixes sont sur la droite L, les pinceaux de droites invariants par G sont constitués des droites passant par un point de L. En d'autres termes, G est un sous-groupe de $\mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$ si et seulement si $p\in L$.

b) Notons de plus H le groupe des transformations birationnelles du plan (exprimées en coordonnées affines dans l'ouvert $z=1$) du type

$$(x,y)\dashrightarrow\Big(\frac{x}{\alpha(y)x+\beta(y)},y\Big),$$

où $\alpha(y),\beta(y)\in\mathbb{C}(y)$ sont des fonctions rationnelles et $\beta\neq 0$. On observe à nouveau que H fixe la droite L (d'équation affine $x=0$) et que H n'est ni fini ni abélien. On voit que H laisse invariant le pinceau des droites de $\mathbb{P}^2$ passant par le point $(1:0:0)$ (d'équations affines $y=a$, $a\in\mathbb{C}$), mais qu'aucun des autres pinceaux de droites du plan n'est invariant par H. En d'autres termes, H est un sous-groupe de $\mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$ si et seulement si p est le point $(1:0:0)\notin L$.

c) Il suit des observations précédentes que le groupe engendré par G et H fixe points par points la droite L ; qu'il n'est ni fini, ni abélien et qu'il n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$, quel que soit le point $p\in\mathbb{P}^2$. On peut également observer que l'intersection des groupes G et H est triviale.

Exemple 4.6. Soit C une courbe cubique plane lisse. Pour tout point p de C notons σ_p l'involution de centre p qui fixe C définie comme suit : si D est une droite générale passant par p, on a $\sigma_p(D)=D$ et la restriction de σ_p à D est l'involution de points fixes $(D\cap C)\backslash\{p\}$.

Si p et p' sont deux points distincts en position générale de C, remarquons que le groupe engendré par σ_p et $\sigma_{p'}$ est un groupe infini non abélien. En effet, les restrictions de σ_p et $\sigma_{p'}$ à la droite passant par p et p' sont deux involutions avec un unique point fixe en commun et leur restriction à cette droite engendre un tel groupe.

Prouvons maintenant, grâce à ces deux exemples, la Proposition 4.1. À l'aide d'une transformation de Cremona, on se ramène au cas où C est une droite ou une cubique lisse. Notons M_C le groupe des transformations de Cremona qui fixent points par points la courbe C. Les Exemples 4.5 et 4.6 montrent que M_C n'est ni fini ni abélien.

Supposons maintenant que M_C est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{Jon}(\mathbb{P}^2)$, ce qui implique que M_C laisse invariant un pinceau de courbes rationnelles Λ. On note $\mathrm{Base}(\Lambda)$ l'ensemble des points-base de ce pinceau. De même qu'à la Section 3, on observe que C est rationnelle : sinon elle coupe une courbe générale de Λ en au moins 2 points en dehors de $\mathrm{Base}(\Lambda)$; comme le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^1$ qui fixent 2 points est abélien, cette situation ne se présente pas. On suppose alors que C est la droite d'équation $x = 0$.

On observe que le groupe G des transformations linéaires qui fixent C (voir Exemple 4.5) opère dans $\mathrm{Base}(\Lambda)$; puisque les points de C sont les seules orbites finies de G, les points-base de Λ appartiennent à C ou lui sont infiniment proches.

Pour tous $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, non tous deux nuls, l'application rationnelle

$$\varphi_{\mu,\nu} : (x : y : z) \dashrightarrow (-x(\mu y + \nu z) : y(x + \mu y + \nu z) : z(x + \mu y + \nu z))$$

est une involution quadratique qui fixe points par points la droite C. Son système linéaire associé Φ est l'ensemble des coniques de $\mathbb{P}^2$ passant par les points $(1 : 0 : 0)$ et $(0 : \nu : -\mu)$ et qui sont tangentes en ce dernier point à la droite d'équation $x + \mu y + \nu z = 0$.

En choisissant μ et ν de telle sorte que le point $(0 : \nu : -\mu)$ ne soit pas un point-base de Λ, l'intersection de Λ et Φ en dehors des points-base est $2n$, où n est le degré des courbes de Λ. L'involution $\varphi_{\mu,\nu}$ envoie donc les courbes de Λ sur des courbes de degré $2n$, ce qui prouve que Λ n'est pas invariant par $\varphi_{\mu,\nu}$ et donc que M_C n'est pas birationnellement conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{Jon}(\mathbb{P}^2)$.

Remarque 4.7. On peut aussi considérer le groupe N_C des transformations de Cremona qui laissent invariante globalement une courbe C de genre > 1 (ce groupe a été introduit dans [Giz] sous le nom de "groupe de décomposition de C").

La Proposition 2.12 donne l'existence d'une fibration rationnelle ou elliptique invariante par N_C. De plus, l'action de N_C sur la courbe C induit une suite exacte

$$1 \to M_C \to N_C \to \mathrm{Aut}(C)$$

où M_C est le groupe des transformations qui fixent points par points la courbe C, déterminé par le Théorème 1.5, et où $\mathrm{Aut}(C)$ est un groupe fini. Pour plus de détails dans cette direction, voir [Coo], [Giz] et [Pan].

Références

[BaBe] L. Bayle and A. Beauville. *Birational involutions of* $\mathbb{P}^2$. Asian J. Math., **4**(1) (2000), 11–18.

[Bea] A. Beauville. *Complex algebraic surfaces*. London Math. Soc. 1996.

[Bla1] J. Blanc. *Finite Abelian subgroups of the Cremona group of the plane*. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **344** (2007), 21–26.

[Bla2] J. Blanc. *On the inertia group of elliptic curves in the Cremona group of the plane*. math.AG/0703804, à paraître dans Michigan Math. J.

[Cas] G. Castelnuovo. *Sulle transformazioni cremoniane del piano, che ammettono una curva fissa.* Rend. Accad. Lincei (1892) ; Memorie scelte, Zanichelli, Bologna, 1937.

[Coo] J.L. Coolidge. *A treatise on algebraic plane curves*. Dover Publications, Inc., 1959.

[ECh] F. Enriques and O. Chisini. *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle finzioni algebriche.* Vol. I, II, III, IV, Coll. Mat, 1924, Reprint 1985.

[dFe] T. de Fernex. *On planar Cremona maps of prime order*. Nagoya Math. J., **174** (2004), 1–28.

[DoIs] I.V. Dolgachev and V.A. Iskovskikh. *Finite subgroups of the plane Cremona group.* math.AG/0610595, à paraître dans Algebra, Arithmetic, and Geometry–Manin Festschrift.

[dFE] T. de Fernex and L. Ein. *Resolution of indeterminacy of pairs*. Algebraic geometry, 165-177, de Gruyter, Berlin (2002).

[Giz] M.H. Gizatullin. *The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry*. Algebraic Geometry and its Applications, Aspects of Mathematics, E, vol. **25** (1994), 39–45.

[God] L. Godeaux. *Géométrie algébrique Tome 2*. Sciences et Lettres, Liège, 1948.

[Har] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Hud] H. Hudson. *Cremona transformations in plane and space*. Cambridge University Press, 1927.

[Iit] S. Iitaka. *Algebraic geometry : An introduction to birational geometry of algebraic varieties*. Graduate texts in Mathematics, 76, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Isk] V.A. Iskovskikh. *Minimal models of rational surfaces over aribtrary fields*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **43** (1979), no 1, 19–43, 237.

[KuMu] N.M. Kumar and M.P. Murthy. *Curves with negative self intersection on rational surfaces*. J. Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 767–777.

[KoMo] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, with the collaboration of C.H. Clemens and A. Corti, Cambridge University Press, 1998.

[Laz] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry I, II*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3.folge, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Pan] I. Pan. *Sur le sous-groupe de décomposition d'une courbe irrationnelle dans le groupe de Cremona du plan*, Michigan Math. J., **55**(2) (2007), 285–298.

[SeRo] J.G. Semple and L. Roth. *Introduction to algebraic geometry*. Oxford, at the Clarendon Press (1949).

Jérémy Blanc
Laboratoire J.A. Dieudonné (UMR 6621 du C.N.R.S.)
Université de Nice Sophia Antipolis
Parc Valrose
06108 Nice cedex 2
FRANCE

E-mail : blancj@math.unice.fr

Ivan Pan
Instituto de Matemática, UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9.500
Porto Alegre, RS
BRASIL

E-mail : pan@mat.ufrgs.br

Thierry Vust
Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4 rue du Lièvre
CP 64, 1211 Genève 4
SWITZERLAND

E-mail : Thierry.Vust@math.unige.ch