

# MMP et variétés de Fano, le travail de CAUCHER BIRKAR

• J. BLANC

## 1. Introduction

En août 2018, Caucher Birkar a obtenu la médaille Fields pour sa preuve bornant l'ensemble des variétés de Fano et ses contributions au programme des modèles minimaux. Cette phrase, traduction de la « short citation » officielle disponible sur le site de l'Union Mathématique Internationale « For the proof of the boundedness of Fano varieties and for contributions to the minimal model program. » est difficile à comprendre pour un non-spécialiste. Le texte qui suit est une tentative de vulgarisation des résultats récompensés.

Le travail de Caucher Birkar concerne la géométrie algébrique, une branche des mathématiques étudiant la géométrie (courbes, surfaces...) avec l'aide d'outils algébriques (anneaux de polynômes, groupes, algèbres...). Sa contribution s'inscrit dans le « programme des modèles minimaux », abrégé MMP pour « Minimal Model Program » en anglais, qui étudie les variétés algébriques en se ramenant à certains types de variétés plus simples, blocs élémentaires de la géométrie birationnelle.

Pour comprendre les résultats fondamentaux obtenus par Caucher Birkar, une brève et élémentaire introduction à la géométrie algébrique complexe et projective est nécessaire. Ce sera le sujet du chapitre 2. Les termes fondamentaux utilisés dans les chapitres suivants, comme *variétés algébriques*, *singularités* ou *applications birationnelles* seront définis.

Le chapitre 3 présentera le *programme des modèles minimaux* (MMP). En essayant de ne pas être trop technique, une description du cas de la dimension 1 et 2 sera donnée, de même que les idées générales du programme en dimension plus grande. Quelques-uns des résultats de l'article fondamental [3] écrit par Caucher Birkar, Paolo Cascini, Chris-

topher Hacon et James McKernan seront expliqués.

Finalement, le chapitre 4 abordera les variétés de Fano et le résultat de Caucher Birkar [1, 2], qui borne cet ensemble de variétés, prouvant la conjecture de Borisov-Alexeev-Borisov (Alexander Borisov & Lev Borisov 1992, Valery Alexeev 1994). Certaines des applications y seront évoquées.

Il existe déjà plusieurs textes présentant les résultats énoncés plus haut. Le séminaire Bourbaki de Stéphane Druel (2007) présente l'article [3]. Le lecteur intéressé pourra également voir la vidéo de la *Laudatio* de Christopher Hacon à l'ICM, présentant les travaux de Caucher Birkar, ou lire le texte officiel, écrit par Allyn Jackson.

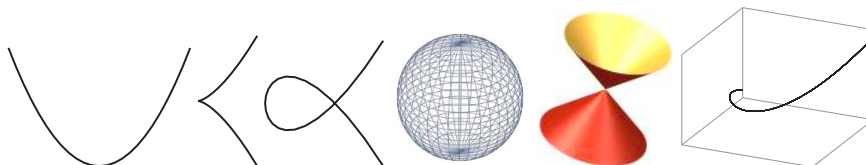
## 2. Brève introduction aux variétés projectives complexes

### 2.1 – Variétés algébriques affines et projectives

La géométrie algébrique étudie les variétés algébriques. Chacune correspond au lieu des zéros d'équations polynomiales, comme

- (i)  $x^3 - y = 1$ ;
- (ii)  $x^3 = y^2$ ;
- (iii)  $y^2 = x^2(x + 1)$ ;
- (iv)  $x^2 + y^2 = z^2 - 1$ ;
- (v)  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ;
- (vi)  $y = x^2, xz = y^2, z = x^3$ .

L'ensemble des couples  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ou triplets  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  satisfaisant aux équations de chacun des exemples est illustré ci-dessous.



Les exemples ci-dessus sont des *variétés affines réelles*. Ce sont des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace affine réel de dimension  $n$  (noté également  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ ).

Le plus souvent, on ne travaille pas avec le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels mais plutôt avec celui des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Cela permet d'éviter d'avoir trop peu de solutions (comme  $x^2 + y^2 = -1$ ) et de manquer d'information sur la variété. Si on le désire, on peut ensuite tout de même étudier les solutions réelles et voir celles-ci comme sous-ensemble des solutions complexes. Les *variétés affines complexes* sont alors données par les zéros de polynômes à coefficients complexes dans  $\mathbb{C}^n$ , l'espace affine complexe de dimension  $n$  (noté également  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ ).

De manière analogue, il est commode d'étudier les variétés *projectives*, lieux des zéros de polynômes homogènes dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , pour un entier  $n \geq 1$ . L'espace  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  est l'ensemble des droites de  $\mathbb{C}^{n+1}$  passant par l'origine. On note souvent une droite  $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  comme un point

$$[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$$

de l'espace projectif où  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  est un élément non nul de la droite  $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ . La droite passant par  $(x_0, \dots, x_n)$  étant la même que celle passant par  $(y_0, \dots, y_n)$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que  $(y_0, \dots, y_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ , on peut identifier  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  à l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , où deux éléments sont équivalents s'ils sont colinéaires.

On peut maintenant définir les *sous-variétés algébriques de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$* . Celles-ci sont les sous-ensembles de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  de la forme

$$\begin{aligned} \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \mid f_1(x_0, \dots, x_n) \\ = 0, \dots, f_r(x_0, \dots, x_n) = 0\} \end{aligned}$$

où  $f_1, \dots, f_r$  sont des polynômes homogènes. Par définition,  $f_i$  est homogène de degré  $d$  si  $f_i(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f_i(x_0, \dots, x_n)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et tout  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Même si la valeur d'un polynôme en un point  $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  dépend du choix du point  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , le fait que le polynôme soit nul ou non n'en dépend pas, si le polynôme est homogène. On peut donc dire d'un polynôme homogène qu'il est nul en un point de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . On observe qu'un polynôme homogène de degré  $d$  est une somme finie de monômes de la forme  $\lambda x_0^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  tels que  $\sum_{i=0}^n a_i = d$ .

## 2.2 – Recouvrement d'une variété projective par des ouverts affines

L'espace  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  est muni d'une topologie naturelle en géométrie algébrique : la *topologie de Zariski*. Pour cette topologie, les ensembles fermés de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  sont les sous-variétés algébriques. On vérifie aisément que l'intersection d'un nombre fini de fermés est fermée (on ajoute simplement plus d'équations). C'est en fait toujours vrai même si on intersecte une infinité d'ensembles fermés : le lieu des zéros d'une infinité d'équations polynomiales est également le lieu des zéros d'un nombre fini d'équations polynomiales. Ce résultat suit du fait que l'anneau  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  est « noethérien ».

La topologie de Zariski est bien différente des topologies habituelles : elle n'est pas « séparée » puisque deux ouverts non vides de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  s'intersectent toujours. Elle est tout de même très utile en géométrie algébrique. Les ouverts non vides étant très « gros » (denses), on peut se restreindre à un ouvert et ne pas perdre trop d'information.

Dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , on trouve  $n+1$  ouverts  $U_0, \dots, U_n$  que l'on définit de la manière suivante :

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

L'ensemble  $U_i$  est ouvert, car complément du lieu des zéros du polynôme homogène  $x_i$ . De plus, on remarque que ces ouverts recouvrent  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  :

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n.$$

Ceci est dû au fait que tout point de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  est, par définition, de la forme  $[x_0 : \dots : x_n]$  avec  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Il existe donc au moins un indice  $i \in \{0, \dots, n\}$  tel que  $x_i \neq 0$ .

On montre maintenant qu'il existe une bijection de  $\mathbb{C}^n$  vers l'ouvert  $U_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Si  $p = [x_0 : \dots : x_n] \in U_i$ , alors  $x_i \in \mathbb{C}^*$ . En choisissant  $\lambda = \frac{1}{x_i} \in \mathbb{C}^*$ , on trouve

$$\begin{aligned} p = [x_0 : \dots : x_n] &= [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n] \\ &= \left[ \frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, les applications

$$\mathbb{C}^n \rightarrow U_i$$

$$(y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \mapsto [y_0 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n]$$

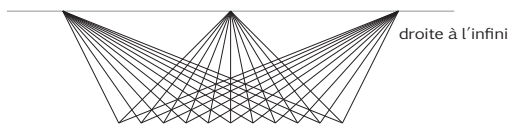
$$U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. On peut donc identifier chacun des ouverts  $U_i$  avec  $\mathbb{C}^n$ . Ainsi, chaque point de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  a un voisinage qui est en bijection avec  $\mathbb{C}^n$ . On étudie alors souvent les variétés projectives de manière locale et on obtient des variétés affines.

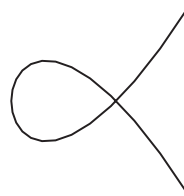
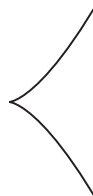
Pour  $n = 1$ , on voit que  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , la *droite projective*, est l'union de  $U_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 \neq 0\}$  et du point  $q = [0 : 1] \in \mathbb{P}^1$ . Comme  $U_0$  est paramétrée par  $\mathbb{C}$ , on peut voir  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  comme l'union de  $\mathbb{C}$  et d'un point « à l'infini ».

Pour  $n = 2$ , le *plan projectif*  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  est l'union de  $U_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid x_0 \neq 0\}$ , en bijection avec  $\mathbb{C}^2$  et de  $L = \{[0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2\}$ , bijectif à  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  via  $[0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_1 : x_2]$ . On trouve alors que  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  est l'union de  $\mathbb{C}^2$  et de la « droite projective à l'infini ». Tout point de cette droite correspond à une direction prise par une droite de  $\mathbb{C}^2$ ; deux droites parallèles donnant le même point à l'infini.



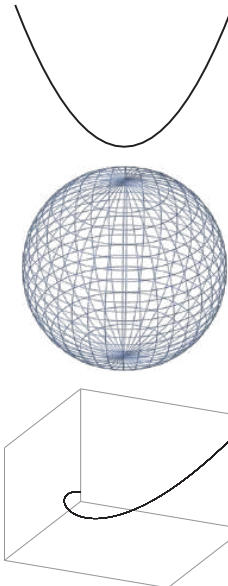
En travaillant avec des variétés algébriques complexes et projectives, de nombreux outils s'offrent à nous. Par exemple, deux courbes du plan projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  s'intersectent toujours au moins en un point. De plus, le théorème de Bézout permet de compter le nombre de points de l'intersection, comptés avec multiplicités : il s'agit du produit des degrés des (polynômes définissant les) deux courbes.

Dans  $\mathbb{R}^2$  il y a 4 types d'équations irréductibles de degré 2 (un polynôme est irréductible s'il n'est pas produit de deux polynômes non constants) : soit il n'y a pas de solution, comme  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ , soit on obtient une conique, une parabole ou une ellipse. Dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , les 4 types sont tous équivalents, à changement de coordonnées près.



### 2.3 – Singularités

Un point  $p$  d'une variété algébrique  $X$  peut être *lisse* ou *singulier*. Si les dérivées partielles des équations définissant  $X$  s'annulent « trop » au point  $p$  (plus précisément si le rang de la matrice correspondant aux dérivées partielles est plus petit que la codimension de la variété), on dit que le point est singulier et sinon on dit qu'il est lisse. La plupart des points d'une variété sont lisses : l'ensemble de tels points forme un ouvert de Zariski (car le lieu singulier est donné par l'annulation de mineures de matrices de dérivées partielles et donc par des équations polynomiales). En particulier, les courbes n'ont qu'un nombre fini de points singuliers. On dit qu'une variété est lisse si tous ses points sont lisses. Il existe toute une littérature étudiant les types de singularités des variétés algébriques et celles-ci jouent un rôle important dans le MMP. Parmi les six variétés données à la section 2.1, les trois suivantes sont lisses



et les trois autres sont singulières (ici avec un seul point singulier, le point « spécial » sur le dessin)

### 2.4 – Applications birationnelles

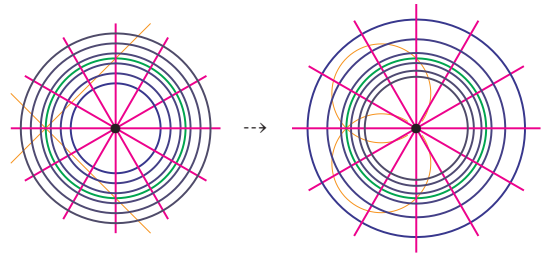
En géométrie algébrique, comme souvent en mathématiques, il est important d'étudier les applications entre les objets que l'on étudie. Les applications entre deux variétés algébriques qui sont données (localement) par des polynômes ou des quotients de polynômes sont appelées *morphismes*. Comme dans les autres sujets, un morphisme admettant un morphisme comme inverse est appelé *isomorphisme*. Par exemple, les bijections  $U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  définies à la section 2.2 sont des isomorphismes et on dit alors que  $U_i$  est *isomorphe* à  $\mathbb{C}^n$ .

Il y a souvent très peu de morphismes partant d'une variété projective. En particulier, tout morphisme d'une variété projective vers une variété affine est constant. De même, l'ensemble des isomorphismes entre variétés algébriques projectives est souvent très petit (paramétré par une variété algébrique et donc de dimension finie). Il est alors naturel d'étudier des « applications » plus générales : les *applications rationnelles*. Une application rationnelle d'une variété algébrique  $X$  vers une autre  $Y$  est un morphisme d'un ouvert (non vide)  $U$  de  $X$  vers  $Y$ , ainsi une application rationnelle  $U \rightarrow Y$  n'est en réalité pas définie sur tout  $X$ . On identifie deux telles applications  $U \rightarrow Y$  et  $V \rightarrow Y$  si elles coïncident sur  $U \cap V$ ; en utilisant le fait que les ouverts s'intersectent, ceci forme une classe d'équivalence. On note alors l'application rationnelle  $X \dashrightarrow Y$ , pour indiquer que certains points ne sont pas définis et on oublie l'ouvert sur lequel l'application est définie, qui est implicite. On peut ensuite composer deux applications rationnelles si l'image de la première intersecte un ouvert sur lequel la deuxième est définie; une application *birationnelle* est alors une application rationnelle qui admet un inverse du même type.

Le plus vieil exemple d'application birationnelle est probablement l'inversion, utilisée par Apollonius de Perge au III<sup>e</sup> siècle avant J.-C. Cette application est définie de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  vers lui-même via

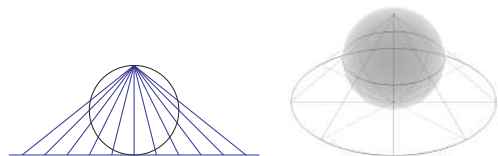
$$(x, y) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Elle envoie les droites passant par l'origine sur elles-mêmes et les autres droites sur des cercles. L'ensemble de ses points fixes est le cercle de rayon 1 centré à l'origine (en vert sur la figure ci-dessous). C'est une application birationnelle car elle est rationnelle et admet un inverse rationnel : elle-même.



On peut bien sûr considérer la même application comme application birationnelle  $\mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ . La même formule donne une application birationnelle, qui est sa propre inverse. En étendant l'application à une application birationnelle  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , via un des plongements de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  défini à la section 2.2 (via une bijection vers l'un des ouverts  $U_i$ ), on trouve exactement trois points non définis : un correspondant à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  et les deux autres sont deux points complexes conjugués à l'infini. Explicitement, en utilisant le plongement  $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, (x, y) \mapsto [x : y : 1]$ , l'application devient  $[x : y : z] \mapsto [xz : yz : x^2 + y^2]$  et les trois points sont  $[0 : 0 : 1]$ , correspondant à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  et  $[1 : \pm\sqrt{-1} : 0]$ , deux points à l'infini.

Un autre exemple très classique est donné par la projection stéréographique. On part de la sphère  $S$  de dimension  $n$  et on projette à partir d'un point  $p$  de  $S$  sur un hyperplan pour obtenir une application birationnelle de  $S$  vers l'espace projectif (ou affine) de dimension  $n$ . Cette application birationnelle est définie en tout point de la sphère hormis le point  $p$ .



Cet exemple a été notamment utilisé pour réaliser des cartes géographiques.

D'autres exemples classiques de transformations birationnelles sont donnés par les *transformations de Möbius*, de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\dashrightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \end{aligned}$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  et  $ad - bc \neq 0$ . En voyant ces applications sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , on obtient le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) = \text{PGL}(2, \mathbb{C})$  des automorphismes de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

### 3. Le programme des modèles minimaux (MMP)

Le *programme des modèles minimaux* (abrégé MMP) part d'une variété algébrique  $X$  et cherche à simplifier celle-ci pour obtenir une variété  $X'$  et une application birationnelle  $X \dashrightarrow X'$  où  $X'$  est plus « simple » que  $X$ .

Grâce à la résolution des singularités obtenue par Heisuke Hironaka en 1964, on peut supposer que la variété  $X$  est projective et *lisse* (c'est-à-dire n'ayant pas de point singulier, comme expliqué à la section 2.3). Le programme des modèles minimaux introduit cependant quelques singularités dès la dimension 3 : la variété  $X'$  obtenue, même si elle est plus simple que  $X$ , est souvent singulière.

#### 3.1 – Le cas des courbes (dimension 1)

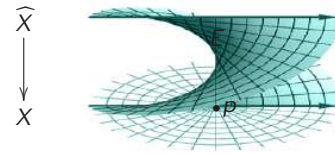
En dimension 1, le programme est essentiellement trivial. Le résultat fondamental, très ancien, est le suivant : toute application birationnelle entre courbes projectives lisses est un isomorphisme. Ainsi, étudier les courbes à application birationnelle près correspond à étudier les courbes projectives lisses à isomorphisme près. La courbe la plus simple est la droite projective :  $\mathbb{P}_C^1$ . Les autres courbes peuvent être classifiées à l'aide d'autres outils, comme le genre, que l'on ne définira pas ici, ou d'autres objets naturels associés aux courbes. Il ne s'agit cependant pas de géométrie birationnelle.

#### 3.2 – Éclatement et contraction en dimension 2

Au XIX<sup>e</sup> siècle, l'école de géométrie algébrique classique (Guido Castelnuovo, Federico Enriques, Gino Fano, Max Noether,...) étudie les variétés algébriques projectives et notamment les surfaces. Une classification des surfaces projectives, à équivalence birationnelle près, est achevée par Federico Enriques (1914-1949).

L'opération fondamentale est l'éclatement d'un point. En prenant une surface projective lisse  $X$  et un point  $p \in X$ , on peut construire une surface projective  $\widehat{X}$ , appelée *éclatement de  $X$  au point  $p$* . C'est une surface projective lisse  $\widehat{X}$  qui contient une courbe  $E \subset \widehat{X}$  et qui admet un morphisme surjectif  $\widehat{X} \rightarrow X$ , défini en tout point, qui contracte  $E$  sur le point  $p$ , et induit un isomorphisme  $\widehat{X} \setminus E \xrightarrow{\sim} X \setminus \{p\}$ . La courbe  $E$  est appelée *courbe exceptionnelle*. Le dessin suivant illustre un éclatement ; l'application  $\widehat{X} \rightarrow X$  est

la projection sur le plan horizontal et la droite  $E$  est la droite verticale contractée sur le point  $p$ .



La surface  $\widehat{X}$  est plus « compliquée » que la surface  $X$  : il y a plus de courbes sur  $\widehat{X}$  que sur  $X$ . Bien sûr l'ensemble des courbes sur  $X$  ou sur  $\widehat{X}$  est infini et tous deux ont la même cardinalité, mais à l'aide de cohomologie ou d'équivalences numériques entre courbes on peut énoncer cela de manière précise.

En général, on veut étudier les variétés algébriques les plus simples possibles. Partant d'une surface projective lisse  $Y$ , on veut remplacer  $Y$  par  $Y'$  si  $Y$  est l'éclatement de  $Y'$  en un point  $p' \in Y'$ . Pour cela, le *critère de Castelnuovo* permet, étant donnée une courbe  $E$  sur  $Y$ , de savoir si cette dernière est la courbe exceptionnelle d'un éclatement  $Y \rightarrow Y'$ . Dans ce cas la surface  $Y'$  est à nouveau projective et lisse et on peut alors répéter le procédé. C'est algorithmique et après un nombre fini de tels pas, on obtient une surface  $Z$  *relativement minimale*, c'est-à-dire n'ayant plus aucune courbe que l'on peut contracter. La surface  $Z$  satisfait alors à une et une seule des trois conditions suivantes :

1.  $Z = \mathbb{P}_C^2$  ;
2. il existe un morphisme  $Z \rightarrow C$  vers une courbe  $C$ , dont toutes les fibres, préimages des points de  $C$ , sont isomorphes à  $\mathbb{P}_C^1$  (c'est même un « fibré localement trivial ») ;
3. la surface  $Z$  n'a plus aucune courbe « d'intersection négative avec le diviseur canonique ».

Les surfaces satisfaisant aux point 3 sont appelées « modèles minimaux » et sont plus compliquées que les autres mais peuvent être étudiées avec d'autres méthodes. Elles sont très « rigides » : il n'existe que peu d'applications birationnelles entre deux telles surfaces.

On obtient ainsi une classification assez précise des surfaces projectives à équivalence birationnelle près.

#### 3.3 – Cône des courbes, diviseur canonique et variétés de Fano

Afin de généraliser l'approche en dimension plus grande, on considère l'ensemble des courbes contenues dans une variété projective  $X$  de dimension quelconque, lisse ou ayant des singularités qui ne

sont pas trop compliquées (ce qui veut dire qu'on arrive tout de même à travailler avec de telles singularités et notamment à définir l'intersection ci-dessous). Étant donnée une courbe  $C \subset X$  et une hypersurface  $H \subset X$  (sous-variété algébrique de  $X$  de dimension  $\dim(X) - 1$ ) ne contenant pas  $C$ , on associe un entier  $C \cdot H$ , qui correspond au nombre de points dans l'intersection de  $H$  et de  $C$ , comptés avec multiplicités. On identifie deux courbes  $C, C'$  si  $C \cdot H = C' \cdot H$  pour toute hypersurface  $H$  ne contenant ni  $C$  ni  $C'$  et on obtient alors un ensemble de classes d'équivalence des courbes qui peut être vu de manière géométrique comme un cône, le *cône des courbes* de  $X$ . Ce cône est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^m$  pour un certain entier  $m$  (ce dernier entier est le *nombre de Picard* de  $X$ , mesurant la complexité de la variété  $X$ ). On peut alors utiliser la géométrie classique, notamment les barycentres, pour étudier la variété  $X$ .

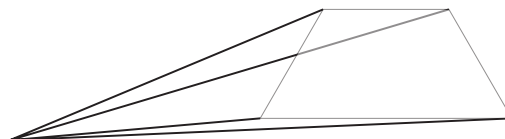
Par exemple, si  $X$  est l'éclatement de  $r$  points de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , alors son rang de Picard est  $r + 1$ . Ainsi, son cône des courbes se plonge naturellement dans  $\mathbb{R}^{r+1}$  et on obtient un cône sur un polyèdre si  $r \leq 8$  et si les points sont « en position générale ».

On associe à toute variété  $X$  (comme-ci dessus lisse ou avec des singularités pas trop compliquées) un *diviseur canonique*  $K_X$ . Ceci correspond à une application du cône des courbes vers  $\mathbb{R}$ , restriction d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^m$  vers  $\mathbb{R}$ . L'application sépare donc ce cône en deux parties selon leurs images : la partie positive et la partie négative. Si la totalité du cône est négative, alors  $X$  est appelée *variété de Fano*. Ces variétés très naturelles en géométrie algébrique jouent le rôle de blocs élémentaires dans la description de variétés algébriques à l'aide du MMP (cf. la section suivante).

### 3.4 – Le programme des modèles minimaux en dimension plus grande

En dimension plus grande, le critère de Castelnuovo peut être remplacé par des conditions sur les classes d'équivalence de courbes d'une variété projective. La partie du cône des courbes qui est négative vis-à-vis du diviseur canonique est étudiée. Le fait que la partie du cône engendrée par des « rayons extrémaux » négatifs est localement polyédrale est dû à Shigefumi Mori si la variété projective est lisse [5, Theorem 1.2]; ce résultat a ensuite été généralisé aux variétés ayant des singularités « pas trop compliquées » (Kawamata-Kollár 1984) (voir [4, Theorem 3.7]). Un exemple de cône avec quatre rayons extrémaux est dessiné ci-dessous. Les courbes que

l'on désire contracter peuvent être vues à l'aide des rayons extrémaux du cône (droites reliant les sommets de polyèdres au sommet du cône).



Au début des années 1980, Shigefumi Mori étudie le cône des courbes pour les variétés projectives lisses de dimension 3 et démontre que l'on peut toujours contracter les rayons extrémaux [5, Theorem 3.1]. Il décrit également précisément les types de contractions [5, Theorems 3.3 & 3.5, Corollary 3.4].

Depuis, le programme des modèles minimaux généralise cette approche en toute dimension. On part d'une variété projective lisse  $Y$  et on peut contracter un rayon extrémal du cône associé. Cela signifie qu'il existe un morphisme  $Y \rightarrow Y'$ , tel que l'image d'une courbe de  $Y$  est un point (on dit que la courbe est contractée) si et seulement si la classe d'équivalence de la courbe est contenue dans le rayon [4, Theorem 3.7(3)].

On obtient trois types de contractions  $Y \rightarrow Y'$ , suivant la nature de l'union  $E \subseteq Y$  des courbes contractées par  $Y \rightarrow Y'$ .

1. Si  $E$  est une hypersurface de  $Y$  (de dimension égale à  $\dim(Y) - 1$ ), le morphisme  $Y \rightarrow Y'$  est birationnel. La variété  $Y'$  n'est plus nécessairement lisse, mais a des singularités qui ne sont « pas trop compliquées » (ici appelées terminales et  $\mathbb{Q}$ -factorielles). On peut réitérer le procédé à partir de  $Y'$ , qui est plus simple que  $Y$ , car contient moins de courbes : la dimension du cône des courbes (nombre de Picard) a baissé de 1.
2. Si  $E = Y$ , on dit que  $Y \rightarrow Y'$  est une *fibration de Mori* : un morphisme  $Y \rightarrow Y'$ , où  $Y'$  est de dimension plus petite que  $Y$  et tel que la pré-image d'un point général  $y \in Y'$  soit une sous-variété de  $Y$  qui est assez simple : une *variété de Fano*.
3. Si la dimension de  $E$  est plus petite que  $\dim(Y) - 1$ , la variété  $Y'$  a des singularités « compliquées » avec lesquelles on n'arrive plus à travailler. On arrive toutefois à faire un *flip*, une application birationnelle  $Y \dashrightarrow Y^+$  déterminée par  $Y \rightarrow Y'$ , qui améliore la situation.

En dimension 2, le cas 1 correspond à l'éclatement d'un point décrit à la section 3.2, le cas 2 correspond aux morphismes vers une courbe avec fibres

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  ou au morphisme trivial de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  vers un point et le « mauvais » cas 3 n'apparaît pas.

Un MMP consiste en un certain nombre de pas comme ci-dessus. À chaque étape 1, on remplace  $Y$  par  $Y'$ , à chaque étape 3, on remplace  $Y$  par  $Y^+$ . On s'arrête dès qu'on obtient le cas 2 (fibration de Mori) ou dès qu'il n'y a plus de rayon extrémal (la variété obtenue est appelée *modèle minimal*).

Le MMP sert à obtenir à partir d'une variété lisse une variété qui lui est birationnelle et qui est plus « simple ». Les modèles minimaux n'ont plus de courbes négatives (courbes préimage d'un nombre négatif via l'application linéaire induite par le diviseur canonique, cf 3.3) et sont très rigides, comme dans le cas des surfaces : il n'y a que très peu d'applications birationnelles entre deux modèles minimaux. Les fibrations de Mori  $Y \rightarrow Y'$  sont soit des variétés de Fano (cas où  $Y'$  est un point), soit des fibrations au-dessus d'une variété de dimension plus petite avec fibres relativement simples (variétés de Fano). On espère alors comprendre  $Y$  en comprenant ses fibres et son image  $Y'$ . On peut également appliquer un MMP à la variété  $Y'$  et procéder par récurrence sur la dimension, décrivant finalement  $Y$  en terme de fibrations de Mori et de variétés de Fano ou de modèles minimaux.

Le programme des modèles minimaux (MMP) a été étudié et utilisé maintes fois depuis les années 80. Les deux problèmes fondamentaux pour terminer le MMP concernent le point 3 ci-dessus. Le premier problème est de montrer l'existence de flips, ce qui correspond à montrer qu'un certain anneau « canonique » est finiment engendré. Le deuxième est la « terminaison des flips » : on aimerait éviter d'avoir un programme qui donne une infinité de flips successifs.

L'existence des flips a tout d'abord été prouvée en dimension 3 (Mori, 1988) puis en dimension 4 (Shokurov, 2003). L'article [3], écrit par Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher Hacon et James McKernan démontre le fait que les anneaux « canoniques » sont finiment engendrés. Ce résultat prouve en particulier que les flips existent toujours, en toute dimension [3, Corollary 1.4.1]. Même s'il ne prouve pas la terminaison des flips en général, leur résultat implique l'existence d'un MMP pour deux types de variétés naturelles, les variétés *de type général* et les variétés *uniréglées*. Ces dernières sont les variétés telles que par tout point il existe une courbe paramétrée par  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Il suit de [3, Corollary 1.3.3] que toute variété uniréglée est birationnelle à une fibration de Mori, via une suite de pas du MMP.

## 4. Variétés de Fano et la conjecture BAB

Comme on l'a vu à la section précédente, les variétés de Fano jouent un rôle très important dans le programme des modèles minimaux. Ce sont les fibres générales des fibrations de Mori obtenues à la fin du MMP lorsque l'on part d'une variété uniréglée.

La conjecture de Borisov-Alexeev-Borisov (Alexander Borisov & Lev Borisov 1992, Valery Alexeev 1994) connue sous le nom de conjecture BAB implique que pour tout entier  $n$ , l'ensemble des variétés de Fano de dimension  $n$  avec des singularités terminales est *borné*. Cela veut dire qu'on peut paramétrer les classes d'isomorphismes de telles variétés avec des variétés algébriques de dimension finie. Plus simplement, pour tout entier  $n \geq 1$  il existe des entiers  $m, d$  dépendant uniquement de  $n$  tels que toute variété de Fano de dimension  $n$  est isomorphe à une sous-variété de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^m$  de degré  $\leq d$ . Le degré et le nombre de variables nécessaires pour définir la variété sont donc bornés. On peut classifier les variétés en fonctions de certains invariants numériques et il s'agit alors de borner ces invariants ; l'ensemble des invariants possibles donne un nombre fini de familles.

En dimension 2, les variétés de Fano correspondent aux *surfaces de del Pezzo*, étudiées depuis plus d'un siècle. Celles-ci sont isomorphes à  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  ou à l'éclatement d'au plus 8 points de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  « en position générale ». Le nombre de points étant borné, l'ensemble des paramètres nécessaires est borné. On obtient alors 10 familles.

En dimension 3, il y a 105 familles de variétés de Fano lisses (Vasily Iskovskikh 1977-1978, Shigefumi Mori & Shigeru Mukai 1983) et nettement plus de familles de variétés de Fano singulières terminales (plusieurs milliers); Yujiro Kawamata a démontré en 1992 qu'il n'y a qu'un nombre fini de familles.

Le fait que pour tout  $n$  l'ensemble des variétés de Fano lisses de dimension  $n$  est borné a également été prouvé dans les années 1990 (Alan Nadel 1991, Frédéric Campana 1992, János Kollár & Yoichi Miyaoka & Shigefumi Mori, 1992).

Finalement, c'est tout récemment que Caucher Birkar a prouvé la conjecture BAB en toute généralité [1, 2].

Son résultat a de multiples conséquences. En particulier, il permet d'étudier la structure des groupes  $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$  des groupes des applications birationnelles  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  pour  $n \geq 3$ . Ces groupes, appelés groupes de Cremona, ont la propriété de Jordan (Yuri Prokhorov & Constantin Shramov, 2016) et ne sont pas simples (Jérémy Blanc, Stéphane Lamy & Susanna Zimmermann, 2019). La preuve de ces résultats en dimension  $n \geq 3$  utilise la conjecture BAB et donc le résultat de Caucher Birkar. En dimension 2, les mêmes résultats ont également été prouvés (respectivement par Jean-Pierre Serre en 2009-2010 et Serge Cantat & Stéphane Lamy en 2013) mais avec d'autres techniques.

## Références

- [1] C. BIRKAR. « Anti-pluricanonical systems on Fano varieties ». *Annals of Mathematics* (à paraître) (2016).
- [2] C. BIRKAR. « Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties ». *Preprint arXiv:1609.05543* (2016).
- [3] C. BIRKAR et al. « Existence of minimal models for varieties of log general type. » *J. Am. Math. Soc.* **23**, n° 2 (2010), p. 405-468.
- [4] J. KOLLÁR et S. MORI. *Birational geometry of algebraic varieties*. **134**. Cambridge Tracts in Mathematics. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [5] S. MORI. « Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective ». *Ann. of Math. (2)* **116**, n° 1 (1982), p. 133-176. ISSN : 0003-486X.



**Jérémy BLANC**

Université de Bâle, Suisse  
jeremy.blanc@unibas.ch

Jérémy Blanc est professeur au département de mathématiques et informatique de l'université de Bâle. Ses travaux portent sur la géométrie algébrique et les groupes de transformations birationnelles.

Je remercie Blanche Buet, Pierre de la Harpe, Sophie Kridi Blanc et Stéphane Lamy pour leurs lectures attentives de cet article et leurs critiques constructives.