Übungen - Blatt 9

→ 18.11.2016 (12h)

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper und

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x^3 + y^3 - xy = 0\}$$

Man möchtet beweisen, dass

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) & \dashrightarrow & C \\ & t & \mapsto & \left(\frac{t^2}{t^3+1}, \frac{t}{t^3+1}\right) \\ \psi\colon & C & \dashrightarrow & \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

birationale Abbildungen sind, die Inverse einzeinander sind (und dann, dass C irreduzibel ist). Beweisen Sie dafür die folgenden Behauptungen:

1. φ ist eine rationale Abbildung $\varphi\colon \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \dashrightarrow C$.
2. ψ ist eine Abbildung $C \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{A}^1(\mathbf{k})$, so dass $\psi(\varphi(t)) = t$ für jedes $t \in \mathbb{A}^1(\mathbf{k})$ mit $t(t^3+1) \neq 0$ und $\varphi(\psi((x,y))) = (x,y)$ für jedes $(x,y) \in C \setminus \{(0,0)\}$.
3. φ ist dominant (benutzen Sie 2).
4. C ist irreduzibel (benutzen Sie Folgerung 4.21).
5. $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_C$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{A}^1(\mathbf{k})}$.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, $Y = \mathbb{A}^1(\mathbf{k})$, $Z = C$ die Kurve von Aufgabe 1 und $\varphi\colon Y \dashrightarrow Z$, $\psi\colon Z \dashrightarrow Y$ die birationale Abbildungen von Aufgabe 1.

1. Berechnen Sie die zwei Menge

$$U = \{y \in \mathrm{dom}(\varphi) \mid \varphi(y) \in \mathrm{dom}(\psi)\}, V = \{z \in \mathrm{dom}(\psi) \mid \psi(z) \in \mathrm{dom}(\varphi)\}.$$

2. Beweisen Sie, dass $Z_{\text{glatt}} = Z \setminus \{(0,0)\}$. (Benutzen Sie Lemma 4.37 für „$\supset$“).
3. Machen Sie ein Bild von $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ für $\mathbf{k} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, $n \geq 1$ und $\varphi_n \colon \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \to \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ der Morphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n \colon & \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) & \to & \mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \\ & t & \mapsto & \left(t^n, t^{n+1}, \dots, t^{2n-1}\right). \end{array}$$

Wir studieren das Bild $Y_n = \varphi_n(\mathbb{A}^1(\mathbf{k}))$.
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $Y_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \,\middle|\, \begin{array}{ll} x_1^{n+i} = (x_{i+1})^n, & i = 1, \dots, n-1, \\ (x_i)^2 = x_{i-1}x_{i+1}, & i = 2, \dots, n-1 \end{array} \right\}$

   Für „$\supset$“beweisen Sie: wenn $x = (x_1, \dots, x_n)$ die obere Gleichungen erfüllt und $x_1 \neq 0$ beweisen Sie, dass $x = \varphi(x_2/x_1)$.

2. Y_n ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ (benutzen Sie 1 und Folgerung 4.21).

3. Der dominante Morphismus $\varphi_n \colon \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \to Y_n$ erfüllt

$$(\varphi_n)^*(\mathscr{O}(Y_n)) = \mathbf{k}[t^n, \dots, t^{2n-1}] = \{a + t^n p \mid a \in \mathbf{k}, p \in \mathbf{k}[t]\}.$$

4. $\varphi_n \colon \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \to Y_n$ ist birational (benutzen Sie 3).

5. $\dim(Y_n) = 1$ und $(Y_n)_{\text{glatt}}$ enthält $Y_n \setminus \{0\}$ (benutzen Sie Lemma 4.37).

6. Für $y = (0, \dots, 0) \in Y_n$ hat man

$$(\varphi_n)^*(\mathscr{O}_{Y_n,y}) = \left\{ \frac{a + t^n p}{b + t^n q} \,\middle|\, a, b \in \mathbf{k}, p, q \in \mathbf{k}[t], b \neq 0 \right\}$$

7. Beweisen Sie, dass $\dim T_y(Y_n) = n$. (Es folgt, dass y nicht glatt ist, wenn $n \geq 2$).

   Tipp: Beweisen Sie, mit 6, dass die Klassen von $X_1, \dots, X_n$ lineare unabhängige Elementen vom $\mathbf{k}$-Vektorraum $\mathfrak{m}_{Y_n,y}/(\mathfrak{m}_{Y_n,y})^2$ sind.