Übungen - Blatt 8

→ 11.11.2016 (12h)

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper, und $\varphi\colon Y \dashrightarrow Z$ eine rationale Abbildung zwischen irreduziblen algebraische Varietäten. Wir nehmen an, dass eine dichte Teilmenge $M \subset Z$ existiert, so dass die folgende Behauptung erfüllt ist:

$$\text{für jedes } p \in M \text{ gibt es (mindestens) zwei verschiedene Punkte } y_1, y_2 \in \operatorname{dom}(\varphi) \subset Y,$$
$$\text{so dass } \varphi(y_1) = \varphi(y_2) = p.$$

Beweisen Sie, dass φ dominant ist, aber nicht birational.
Tipp: Sie sollten Aufgabe 4(e) vom Blatt 7 benutzen.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossenen Körper. Sind die folgenden rationale Abbildungen birational?

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1\colon & \mathbb{A}^2 & \to & \mathbb{A}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2, y^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2\colon & \mathbb{A}^2 & \to & \mathbb{A}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (\frac{x^2}{y}, \frac{x}{y}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_3\colon & \mathbb{A}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (\frac{x^2}{y}, \frac{x}{y^2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_4\colon & \mathbb{A}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x, x^2) \end{array}$$

Tipp: Um zu beweisen, dass eine rationale Abbildung nicht birational ist, kann man entweder beweisen, dass sie nicht dominant ist, oder Aufgabe 1 benutzen.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \setminus \{0\}$ und $b = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$. Wir definieren

$$\begin{array}{rccl} \psi\colon & \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) & \to & \mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \\ & t & \mapsto & (a_1t+b_1, a_2t+b_2, \dots, a_nt+b_n) \end{array}$$

1. Beweisen Sie, dass ψ ein Isomorphismus $\mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \xrightarrow{\simeq} \ell$ gibt, wo $\ell \subset \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$, vom Dimension 1 ist (*solche Teilmengen heissen Geraden*), die glatt ist (d.h. $\ell_{\text{glatt}} = \ell$).

   Tipp: Definieren Sie $\ell = V(a_i(X_j - b_j) - a_j(X_i - b_i))_{i,j=1}^n$ und beweisen Sie, dass $\psi(\mathbb{A}^1(\mathbf{k})) = \ell$ und $I(\ell) = (a_i(X_j - b_j) = a_j(X_i - b_i))_{i,j=1}^n$. Finden Sie dann eine Inverse von $\psi\colon \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \to \ell$.

2. Sei $Y \subset \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ eine abgeschlossene Teilmenge, mit $b \in Y$.

   Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

   (a) $(a_1,\dots,a_n) \in T_b(Y)$.

   (b) Für jedes $f \in I(Y)$ ist das Polynom $f \circ \psi = f(a_1t+b_1,\dots,a_nt+b_n) \in \mathbf{k}[t]$ ein Multipel von t^2.

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Finden Sie $\dim(Y)$ und Y_{glatt}.

1. $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid xy = 1\}$;
2. $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x^2y = 1\}$;
3. $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x^2 = y^3\}$;
4. $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x^2 = y^3 - 1\}$.