

Übungen - Blatt 7

→ 21.04.2017 (12h)

Wir arbeiten über ein Körper \mathbf{k} , algebraisch abgeschlossen und schreiben

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbf{k}), \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$$

für jedes $n \geq 1$.

Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{a} \subset \mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]$. Finden Sie das Hilbertsche Polynom $\chi_{\mathfrak{a}} \in \mathbb{Q}[X]$:

1. $\mathfrak{a} = (X_0)$;
2. $\mathfrak{a} = (X_0 X_1)$;
3. $\mathfrak{a} = (X_0^2 X_1, X_1^2 X_0)$;
4. $\mathfrak{a} = (X_0^2 + X_1^2 + X_2^2)$.

Aufgabe 2

Wir nehmen ein Morphismus $\rho: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ und definieren $Y = \rho(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$. Finden Sie das Hilbertsche Polynom $\chi_Y \in \mathbb{Q}[X]$:

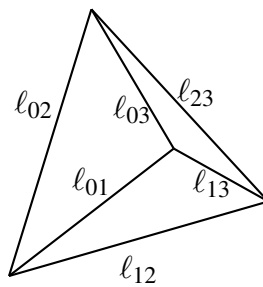
1. $\rho: [u : v] \mapsto [u^4 : u^3 v : u v^3 : v^4]$,
2. $\rho: [u : v] \mapsto [u^4 : u^3 v : u^2 v^2 : v^4]$.

Tipp: Wenn $\rho: [u : v] \mapsto [p_0(u, v) : \dots : p_3(u, v)]$ wo p_0, \dots, p_3 homogen vom Grad m sind, kann man für jedes $d \geq 0$ die lineare Abbildung $\rho: \mathbf{k}[X_0, X_1, X_2, X_3]_d \rightarrow \mathbf{k}[u, v]_{dm}$, $P(X_0, \dots, X_3) \rightarrow P(p_0, \dots, p_3)$ betrachten. Beweisen Sie, dass $\ker \rho = I(Y)_d$. Was ist das Bild?

Aufgabe 3

Wir definieren sechs Geraden $l_{ij} \subset \mathbb{P}^3$ als

$$\begin{aligned} l_{01} &= V(X_0, X_1), & l_{02} &= V(X_0, X_2), & l_{03} &= V(X_0, X_3) \\ l_{12} &= V(X_1, X_2), & l_{13} &= V(X_1, X_3), & l_{23} &= V(X_2, X_3) \end{aligned}$$



1. Berechnen Sie alle $\chi_{l_{ij}}$.

Tipp: Mit Koordinatenwechseln braucht man nur eine zu berechnen.

2. Berechnen Sie alle χ_Y , wo Y die Vereinigung von zwei Geraden l_{ij} ist.

Tipp: Mit Koordinatenwechseln gibt es nur zwei Fälle. Man kann dann Folgerung 7.10 (mit 1.) oder Lemma 7.9 benutzen.

3. Berechnen Sie alle χ_Y , wo Y die Vereinigung von drei Geraden l_{ij} ist.

Tipp: Mit Koordinatenwechseln gibt es nur drei Fälle. Man kann dann Lemma 7.9 (mit 2.) benutzen.

4. Berechnen Sie χ_Y , wo Y die Vereinigung von allen sechs Geraden ist.

Tipp: Man kann Lemma 7.9 (mit 3.) benutzen.