Jérémy Blanc
Enrica Floris

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 7

→ 4.11.2016 (12h)

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper und $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid xy = 1\}$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(*a*) Die folgende ist eine eine birationale Abbildung $\varphi\colon \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \dashrightarrow Y$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) & \to & Y \\ & t & \mapsto & (t, \frac{1}{t}). \end{array}$$

(*b*) $\mathrm{dom}(\varphi) = \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \setminus \{0\}$ und $\mathrm{dom}(\varphi^{-1}) = Y$.

(*c*) φ^* ist ein Isomorphismus von $\mathbf{k}$-Algebren

$$\varphi^*\colon \mathbf{k}(Y) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{k}(\mathbb{A}^1(\mathbf{k})) = \mathbf{k}(t),$$

der $\mathscr{O}(Y)$ auf $\mathbf{k}[t, \frac{1}{t}]$ schickt.

Aufgabe 2

Sei Y eine irreduzible affine Varietät, $p \in Y$ und $f \in \mathbf{k}(Y) \setminus \{0\}$, mit $p \in \mathrm{dom}(f)$.
Beweisen Sie, dass $f(p) \neq 0 \Leftrightarrow p \in \mathrm{dom}(\frac{1}{f})$.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper, Y_1, Y_2, Y_3 drei irreduzible algebraische Varietäten und

$$\varphi_1\colon Y_1 \dashrightarrow Y_2, \varphi_2\colon Y_2 \dashrightarrow Y_3$$

zwei dominante rationale Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(*a*) $U = \{y \in \mathrm{dom}(\varphi_1) \mid \varphi_1(y) \in \mathrm{dom}(\varphi_2)\}$ ist eine offene dichte Teilmenge von Y_1.

(*b*) $U \subset \mathrm{dom}(\varphi_2 \circ \varphi_1)$.

Tipp: Sie sollten $Y_i \subset \mathbb{A}^{n_i}(\mathbf{k})$ sehen und φ_1, φ_2 mit Elementen von $\mathbf{k}(Y_1), \mathbf{k}(Y_2)$ schreiben.

(*c*) Für jedes $u \in U$ hat man $\varphi_2(\varphi_1(u)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(u)$.

Tipp: Benutzen Sie Satz 4.23.

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper, Y, Z zwei irreduzible algebraische Varietäten und $\varphi\colon Y \dashrightarrow Z$ eine birationale Abbildung, mit Inverse $\psi\colon Z \dashrightarrow Y$.

(a) $U = \{y \in \mathrm{dom}(\varphi) \mid \varphi(y) \in \mathrm{dom}(\psi)\}$ ist eine offene dichte Teilmenge von Y.
$V = \{z \in \mathrm{dom}(\psi) \mid \psi(z) \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$ ist eine offene dichte Teilmenge von Z.

Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 3.

(b) Für jedes $y \in U$ hat man $\psi(\varphi(y)) = y$.
Für jedes $z \in V$ hat man $\varphi(\psi(z)) = z$.

Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 3.

(c) $\varphi(U) \subset V$ und $\psi(V) \subset U$.

(d) Die Einschränkung von φ gibt eine Bijektion $U \xrightarrow{\simeq} V$.

(e) Für jedes $p \in V$ gibt es genau ein Punkt $q \in \mathrm{dom}(\varphi)$, so dass $\varphi(q) = p$.