| | | |
|---|---|---|
| Jérémy Blanc<br>Enrica Floris | ALGEBRAISCHE GEOMETRIE – II<br>Frühlingsemester 2017 | Universität<br>Basel<br>Mathematik |

# Übungen - Blatt 6

*→ 07.04.2017 (12h)*

Wir arbeiten über ein Körper $\mathbf{k}$, algebraisch abgeschlossen und schreiben

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbf{k}), \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$$

für jedes $n \geq 1$.

## Aufgabe 1

Sei $\ell = \{[X_0 : X_1 : X_2 : X_3] \in \mathbb{P}^3 \mid X_0 = 0, X_1 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ (eine Gerade in $\mathbb{P}^3$) und sei $F \in \mathbf{k}[X_0,\dots,X_1]$ ein irreduzibles homogenens Polynom vom Grad 3, so dass

$$S = \{[X_0 : X_1 : X_2 : X_3] \in \mathbb{P}^3 \mid F(X_0,X_1,X_2,X_3) = 0\}$$

glatt ist (heisst Kubische Fläche).
Beweisen Sie, die folgenden Behauptungen:

1. Es gibt $A, B \in \mathbf{k}[X_0,\dots,X_1]$ homogen vom Grad 2, so dass $F = AX_0 - BX_1$.
2. Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} \eta: \quad S & \to & \mathbb{P}^4 \\ [X_0 : X_1 : X_2 : X_3] & \mapsto & \begin{cases} [X_0^2 : X_0X_1 : X_0X_2 : X_0X_3 : B(X_0,\dots,X_3)] & \text{wenn } X_0 \neq 0 \text{ oder } B \neq 0 \\ [X_0X_1 : X_1^2 : X_1X_2 : X_1X_3 : A(X_0,\dots,X_3)] & \text{wenn } X_1 \neq 0 \text{ oder } A \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

   ein Morphismus ist.
3. Beweisen Sie, dass

$$\eta(S) = \{[X_0 : \cdots : X_4] \in \mathbb{P}^4 \mid X_4X_0 = B(X_0,\dots,X_3), X_4X_1 = A(X_0,\dots,X_3)\}$$

   eine glatte Fläche ist (glatte projective Varietät vom Dimension 2) und dass $\eta|_S \colon S \to \eta(S)$ die Aufblasung von $p = [0 : \cdots : 0 : 1]$ ist, mit $(\eta|_S)^{-1}(p) = \ell \simeq \mathbb{P}^1$.

## Aufgabe 2

Sei $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}$ ein Ideal, dass man schreiben kann, als $\mathfrak{a} = (d)$ mit $d \geq 0$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $\mathfrak{a}$ ist prim $\Leftrightarrow d = 0$ oder $d$ ist eine Primzahl.
2. $\mathfrak{a}$ ist primär $\Leftrightarrow d = 0$ oder $d = p^n$ wo $n \geq 1$ und $p$ eine Primzahl ist.
3. $\mathfrak{a}$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a}$ ist primär.

## Aufgabe 3

Sei $R = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ und $\mathfrak{a} = (X_1^{a_1}, \dots, X_r^{a_r}) \subset R$ ein Ideal, mit $1 \leq r \leq n$ und $a_1, \dots, a_r \geq 1$. Man möchte beweisen, dass $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal ist.
Machen Sie zuerst den Fall wo $r = n$ (mit Lemma 7.2).
Dann nimmt man an, dass $r < n$ und nimmt man $P, Q \in R$ so dass $PQ \in \mathfrak{a}$. Wir möchten zeigen, dass $P \in \mathfrak{a}$ oder $Q \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $\sqrt{\mathfrak{a}} = (X_1, \dots, X_r)$.

   *Tipp: Benutzen Sie den Nullstellensatz.*

2. Man kann $P$, $Q$ und $PQ$ als

$$P = \sum_{(b_1,\dots,b_r) \in \mathbb{N}^r} X_1^{b_1} \cdots X_r^{b_r} \cdot P_{(b_1,\dots,b_r)}$$

$$Q = \sum_{(b_1,\dots,b_r) \in \mathbb{N}^r} X_1^{b_1} \cdots X_r^{b_r} \cdot Q_{(b_1,\dots,b_r)}$$

$$PQ = \sum_{(b_1,\dots,b_r) \in \mathbb{N}^r} X_1^{b_1} \cdots X_r^{b_r} \cdot S_{(b_1,\dots,b_r)}$$

   wo $P_b, Q_b, S_b \in \mathbf{k}[X_{r+1}, \dots, X_n]$ für jedes $b = (b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{N}^r$, und nur endlich viele nicht null sind.

3. Wenn $P \notin \mathfrak{a}$ und $Q \notin \sqrt{\mathfrak{a}} = (X_1, \dots, X_r)$ hat man $Q_0 \neq 0$ und gibt es $b = (b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{N}^r$ mit $b_i < a_i$ für ein $i \in \{1, \dots, r\}$ und $P_b \neq 0$.

4. Wenn man $b$ wie in 3. wählt, so dass $b$ minimal ist (d.h. $P_{b'} = 0$ für alle $b' = (b'_1, \dots, b'_r)$ mit $b'_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, r$), hat man $S_b \neq 0$.

5. Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist primär.

## Aufgabe 4

Sei $R = \mathbf{k}[x, y]$ und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Man möchte zeigen, dass $\mathfrak{a} = (x, y^2)$ ein irreduzibles Ideal von $R$ ist, das nicht prim ist. Beweisen Sie, die folgenden Behauptungen:

1. Jedes $P \in \mathbf{k}[x, y]$ ist der Form $a + by + R$, mit $a, b \in \mathbf{k}$, $R \in \mathfrak{a}$. Mit dieser Beschreibung hat man $P \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow a = b = 0$.

2. $y \notin \mathfrak{a}$ aber $y^2 \in \mathfrak{a}$.

3. Wenn $\mathfrak{b} \subset \mathbf{k}[x, y]$ ein Ideal ist, so dass $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}$, gibt es $a, b \in \mathbf{k}$ mit $a + by \in \mathfrak{b} \setminus \{0\}$. Zusätlich findet man

   (a) $b = 0 \Rightarrow \mathfrak{b} = \mathbf{k}[x, y]$.

   (b) $a \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{b} = \mathbf{k}[x, y]$.
   *Tipp:* $(a + by) \cdot (a - by) \in \mathfrak{b}$ *und* $by^2 \in \mathfrak{a}$.

4. Wenn $\mathfrak{b} \subset \mathbf{k}[x, y]$ ein Ideal ist, so dass $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq \mathbf{k}[x, y]$, hat man $\mathfrak{b} = (x, y)$.

   *Tipp: Mit 3. beweisen Sie, dass $y \in \mathfrak{b}$, und dann dass $(x, y) \subset \mathfrak{b}$.*

5. $\mathfrak{a}$ ist ein irreduzibles Ideal von $\mathbf{k}[x, y]$.

   *Tipp: Benutzen Sie 4.*