Übungen - Blatt 6

→ 28.10.2016 (12h)

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper und $X = \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Jedes Element $f \in \mathbf{k}(X) \setminus \{0\}$ ist der Form $f = \frac{g}{h}$, mit $g, h \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ ohne gemeinsam Teiler.

(b) Wenn $f = \frac{g}{h} \in \mathbf{k}(X)$ mit $g, h \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ ohne gemeinsam Teiler, hat man

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \mid h(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}.$$

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ ein *algebraisch abgeschlossene* Körper und

$$Y = \{(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{A}^3(\mathbf{k}) \mid X_2X_3 = X_1(X_1 - 1)\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $I(Y) = (X_2X_3 - X_1(X_1 - 1))$

(b) Y ist irreduzibel.

(c) $\mathbf{k}(Y) \simeq \mathbf{k}(X_1, X_2)$ (Quotientskörper von Polynomen in zwei Variablen).

Aufgabe 3

Sei $Y = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ und $f = \frac{X_1}{(X_1)^2 + (X_2)^2 + 1} \in \mathbb{R}(Y)$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{dom}(f) = Y$, aber dass $f \notin \mathscr{O}(Y)$ (also ist Satz 4.12(2) falsch wenn $\mathbf{k}$ nicht algebraisch abgeschlossen ist).

Aufgabe 4

(a) Sei A ein Ring und $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal. Beweisen, dass die Faktorgruppe $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ ein $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum ist, für jedes $n \geq 1$, mit der Skalarmultiplikation $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$, für $a \in A$, $b \in \mathfrak{m}^n$, $[a] \in A/\mathfrak{m}$, $[b] \in \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$.

Errinerung: Elementen von $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ sind Klasse $[a]$, mit $a \in \mathfrak{m}^n$, wobei $[a] = [a']$ genau dann wenn $a - a' \in \mathfrak{m}^{n+1}$.

(b) Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper, Y eine irreduzible affine algebraische Varietät und $p \in Y$.

Beweisen Sie, dass $\mathfrak{m}_{Y,p}/(\mathfrak{m}_{Y,p})^2$ ein $\mathbf{k}$-Vektorraum ist (mit (a)).

(c) Berechnen Sie die Dimension vom $\mathbf{k}$-Vektorraum $\mathfrak{m}_{Y,p}/(\mathfrak{m}_{Y,p})^2$ für $Y = \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$.

Tipp: Mit Lemma 4.14 und Translationen bemerken Sie, dass man $p = (0,0,\dots,0)$ wählen kann. Beweisen Sie dann finden, dass die Klassen von $X_1,\dots,X_n$ eine Basis geben.

Aufgabe 5

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper und $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x^2 = y^3\}$.

(a) Beweisen Sie, dass $Y = \{(0,0)\} \cup \{(t^3,t^2) \mid t \in \mathbf{k}^*\}$.

Tipp: Wenn $(x,y) \in Y \setminus \{(0,0)\}$, bemerken Sie, dass $(\frac{x}{y})^2 = y$ und $(\frac{x}{y})^3 = x$.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathscr{O}_{p,Y}$ und $\mathscr{O}_{q,Y}$ isomorphen $\mathbf{k}$-Algebren sind für alle $p,q \in Y \setminus \{(0,0)\}$.

Tipp: Beweisen Sie dass $Y \to Y$, $(x,y) \mapsto (u^3x, u^2y)$ ein Isomorphismus ist, für jedes $u \in \mathbf{k}^*$ und benutzen Sie Lemma 4.14.

(c) Beweisen Sie, dass $\mathscr{O}_{p,Y}$ und $\mathscr{O}_{q,Y}$ keine isomorphe $\mathbf{k}$-Algebren sind, wenn $p = (0,0)$ und $q \in Y \setminus \{(0,0)\}$.

Tipp: Rechnen Sie die Dimension von $\mathfrak{m}_{Y,p}/(\mathfrak{m}_{Y,p})^2$ und $\mathfrak{m}_{Y,q}/(\mathfrak{m}_{Y,q})^2$ als $\mathbf{k}$-Vektorräumen.