Übungen - Blatt 5

→ 31.03.2017 (12h)

Wir arbeiten über ein Körper $\mathbf{k}$, algebraisch abgeschlossen und schreiben

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbf{k}), \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$$

für jedes $n \geq 1$.

Aufgabe 1

Sei T ein topologischer Raum, $U \subset T$ eine offene Teilmenge und $F \subset T$ eine Teilmenge.
Man schreibt $\overline{F}$ der Abschluss von F in T.
Beweisen Sie, dass $\overline{F} \cap U$ der Abschluss von $F \cap U$ in U ist.
Tipp: Die Menge $\overline{F} \cap U$ ist abgeschlossen in U und enthält $F \cap U$, also enthält der Abschluss von $F \cap U$ in U, der gleich $Y \cap U$ ist, mit $Y \subset T$ abgeschlossen. Bemerken Sie, dass man kann annehmen, dass $T \setminus U \subset Y$.

Aufgabe 2

Sei $\pi\colon B\ell_p(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{P}^2$ die Aufblasung von $p = [1:0:0] \in \mathbb{P}^2$, sei $E = \pi^{-1}(p)$ und sei

$$\hat{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{p\})}.$$

Zu welchen Varietät ist $\hat{C}$ isomorph? Wie viele Punkte enthält $E \cap \hat{C}$?

(a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + yz = 0\} \subset \mathbb{A}^2$

(b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2z + y^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^2$

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xyz + y^3 + x^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^2$

(d) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^3z^2 + y^5 = 0\} \subset \mathbb{A}^2$

Tipp: Sie können Blatt 4 benutzen.

Aufgabe 3

Sei $W = \{([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1 : y_2]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \mid x_0 y_0 = x_1 y_1 = x_2 y_2\}$

1. Beweisen Sie, dass W irreduzibel ist.

   Tipp: Sie können zum Beispiel eine Überdeckung von W geben und Aufgabe 1 benutzen.

2. Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rccc} \pi : & W & \to & \mathbb{P}^2 \\ & ([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1 : y_2]) & \mapsto & [x_0 : x_1 : x_2] \end{array}$$

   ein birationaler Morphismus ist, mit Inverse

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & W \\ [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & ([x_0 : x_1 : x_2], [x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1]). \end{array}$$

   Ist π surjektiv? Für welche Punkte $p \in \mathbb{P}^2$ enthält $\pi^{-1}(\{p\})$ mehr als ein Punkt?

3. Beweisen Sie, dass π die Aufblasung von $\mathbb{P}^2$ im $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ ist (wie in Lemma 6.26).

Aufgabe 4

Sei $W = \{([a : b], [c : d], [x : y : z]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \mid xb = ya \text{ und } yd = zc\}$

1. Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rccc} \pi : & W & \to & \mathbb{P}^2 \\ & ([a : b], [c : d], [x : y : z]) & \mapsto & [x : y : z] \end{array}$$

   die Aufblasung von $\mathbb{P}^2$ in $[0 : 0 : 1]$ und $[1 : 0 : 0]$ ist.

2. Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rccc} \eta : & W & \to & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ & ([a : b], [c : d], [x : y : z]) & \mapsto & ([a : b], [c : d]) \end{array}$$

   die Aufblasung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in $([1 : 0], [0 : 1])$ ist.

Tipp: Sie sollten Aufgabe 4 vom Blatt 4 benutzen.