Übungen - Blatt 4

→ 24.03.2017 (12h)

Wir arbeiten über ein Körper $\mathbf{k}$, algebraisch abgeschlossen und schreiben

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbf{k}), \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$$

für jedes $n \geq 1$.

Aufgabe 1

Sei T ein topologischer Raum und $U_1, \ldots, U_n \subset T$ offene nichtleere Teilmenge so dass $T = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Beweisen Sie, dass die folgende Aussage äquivalent sind:

(a) T ist irreduzibel;

(b) Alle U_i sind irreduzibel und $U_j \cap U_i \neq \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) Alle U_i sind irreduzibel und es gibt $j \in \{1, \ldots, n\}$ so dass $U_j \cap U_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Tipp: Für $(c) \Rightarrow (a)$ beweisen Sie zuerst, dass U_i dicht in T liegt.

Aufgabe 2

Sei $\pi \colon B\ell_0(\mathbb{A}^2) \to \mathbb{A}^2$ die Aufblasung von $p = (0,0) \in \mathbb{A}^2$, sei $E = \pi^{-1}(p)$ und sei

$$\hat{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{p\})}.$$

Beschreiben Sie $\hat{C} \cap W_i$, für $i = 1, 2$, wo

$$\begin{aligned} W_1 &= \{((x,y),[u:v]) \in B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k})) \mid u \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^2, \\ W_2 &= \{((x,y),[u:v]) \in B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k})) \mid v \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^2. \end{aligned}$$

Ist $\hat{C}$ glatt? Wie viele Punkte gibt es in $\hat{C} \cap E$?

(a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

(b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y^3 = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy + y^3 + x^3 = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

(d) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^3 + y^5 = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

Tipp: Es sollte nutzlich Aufgabe 3 vom Blatt 3 zu benutzen.

Aufgabe 3

Zu welchen Varietät ist die Aufblasung $\tilde{C}$ von C im Punkt $p = (0,0)$ isomorph? Ist $\tilde{C}$ glatt ?

(a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

(b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y^3 = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy + y^3 + x^3 = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

(d) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^3 + y^5 = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4

Sei $W = \{([a:b],[c:d],[x:y:z]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \mid xb = ya \text{ und } yd = zc\}$

1. Beweisen Sie, dass W irreduzibel ist.

   Tipp: Sie können zum Beispiel eine Überdeckung von W geben und Aufgabe 1 benutzen.

2. Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{cccc} \pi: & W & \to & \mathbb{P}^2 \\ & ([a:b],[c:d],[x:y:z]) & \mapsto & [x:y:z] \end{array}$$

   ein birationaler Morphismus ist, mit Inverse

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & W \\ [x:y:z] & \mapsto & ([x:y],[y:z],[x:y:z]). \end{array}$$

   Ist π surjektiv? Für welche Punkte $p \in \mathbb{P}^2$ enthält $\pi^{-1}(\{p\})$ mehr als ein Punkt?

3. Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{cccc} \eta: & W & \to & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ & ([a:b],[c:d],[x:y:z]) & \mapsto & ([a:b],[c:d]) \end{array}$$

   ein birationaler Morphismus ist, mit Inverse

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \dashrightarrow & W \\ ([a:b],[c:d]) & \mapsto & ([a:b],[c:d],[ac:bc:bd]). \end{array}$$

   Ist η surjektiv? Für welche Punkte $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ enthält $\eta^{-1}(\{p\})$ mehr als ein Punkt?