Übungen - Blatt 3

→ 17.03.2017 (12h)

Wir arbeiten über ein Körper $\mathbf{k}$, algebraisch abgeschlossen und schreiben

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbf{k}), \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$$

für jedes $n \geq 1$.

Aufgabe 1

Sei $d \geq 1$ eine ganze Zahl.

(a) Beweisen Sie, dass die Menge $\{f \in \mathbf{k}[x,y,z] \mid f \text{ homogen vom Grad } d\}$ ein $\mathbf{k}$-Vektorraum vom Dimension $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ ist, mit Basis

$$x^d, x^{d-1}y, x^{d-1}z, x^{d-2}y^2, x^{d-2}yz, x^{d-2}z^2, \ldots,$$

$$xy^{d-1}, xy^{d-2}z, \ldots, xyz^{d-2}, xz^{d-1}, y^d, y^{d-1}z, \ldots, yz^{d-1}, z^d.$$

Diese kann man auch wie folgt schreiben:

$$\begin{gathered} x^d, \\ x^{d-1}y, x^{d-1}z, \\ x^{d-2}y^2, x^{d-2}yz, x^{d-2}z^2 \\ \vdots \\ xy^{d-1}, xy^{d-2}z, \ldots, xyz^{d-2}, xz^{d-1}, \\ y^d, y^{d-1}z, \ldots, yz^{d-1}, z^d. \end{gathered}$$

(Jede Zeile ist der Form $x^iy^{d-i}, x^iy^{d-i-1}z, \ldots, x^iyz^{d-i-1}, x^iz^{d-i}$ mit $i \in \{0, \ldots, d\}$)

(b) Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} \varphi_d & : & \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}} \\ [x:y:z] & \mapsto & [x^d, x^{d-1}y, x^{d-1}z, x^{d-2}y^2, x^{d-2}yz, x^{d-2}z^2, \ldots, yz^{d-1}, z^d] \end{array}$$

(man nimmt die Basis von oben) ein abgeschlossener Morphismus ist, der ein Isomorphismus

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\simeq} \varphi_d(\mathbb{P}^2)$$

gibt (heisst „Veronese Einbettung“).

(c) Sei $P \in \mathbf{k}[x,y,z]$ ein homogenes Polynom vom Grad d und $C = V(P) = \{[a:b:c] \in \mathbb{P}^2 \mid P(a,b,c) = 0\}$. Beweisen Sie, dass die Einschränkung von φ_P ein Isomorphismus

$\mathbb{P}^2 \setminus C \xrightarrow{\simeq} \varphi_d(\mathbb{P}^2) \setminus H$ wo $H \subset \mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ eine Hyperebene ist (Nullstellemenge von einer Gleichung vom Grad 1).

Beweisen Sie, dass $\mathbb{P}^2 \setminus C$ isomorph zu eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ ist, also eine affine Fläche ist (affine Varietät vom Dimension 2).

Aufgabe 2

Sei $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ eine abgeschlossene Teilmenge. Wenn ist $\mathbb{P}^2 \setminus \Delta$ eine affine Varietät? Ist $\mathbb{P}^2 \setminus \Delta$ glatt? Vergleichen Sie dann mit Aufgabe 2 vom Blatt 2.

Aufgabe 3

Sei $\pi \colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ der Morphismus $(x,y) \mapsto (x,xy)$.
Berechnen Sie die irreduzible Zerlegung von $\pi^{-1}(C)$ in irreduziblen Komponenten:

(a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

(b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y^3 = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy + y^3 + x^3 = 0 \subset \mathbb{A}^2\}$