

# Übungen - Blatt 3

→ 07.10.2016 (12h)

## Aufgabe 1

Sei  $\mathbf{k}$  ein Körper und  $f, g \in \mathbf{k}[x, y]$  zwei Polynome, die koprim sind. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1.  $f, g$  sind auch koprim in  $\mathbf{k}(x)[y]$ .
2.  $(f, g) = (1)$  in  $\mathbf{k}(x)[y]$ .
3. Es gibt  $R, S \in \mathbf{k}(x)[y]$ , so dass  $fR + gS = 1$ .
4. Es gibt  $D \in \mathbf{k}[x] \setminus \{0\}$  und  $A, B \in \mathbf{k}[x, y]$ , so dass  $Af + Bg = D$ .
5. Die Menge  $V(f, g) \subset \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$  ist endlich.

## Aufgabe 2

Sei  $\mathbf{k}$  ein Körper und  $n \geq 1$ . Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1.  $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$  ist irreduzibel;
2.  $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$  ist zusammenhängend;
3.  $\mathbf{k}$  ist unendlich.

## Aufgabe 3

Sei  $Z$  ein topologischer Raum und  $f: Z \rightarrow \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$  eine Abbildung, sei  $\mathbf{k}$  ein Körper und  $n \geq 1$ . Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. Die Abbildung  $f$  ist stetig.
2. Für jedes Polynom  $P \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  ist  $f^{-1}(V(P))$  abgeschlossen in  $Z$ .

## Aufgabe 4

Welche sind die irreduzible Teilmengen von  $\mathbb{A}^1(\mathbf{k})$ ?

## Aufgabe 5

Welche sind die irreduzible Teilmengen von  $\mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ , wenn  $\mathbf{k}$  unendlich ist?

*Tipp: Benutzen Sie Aufgaben 1 und 3. Die Antwort sollte sein:  $\emptyset$ ,  $\mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ , Punkte und die unendlichen Mengen  $V(f)$ , wobei  $f$  irreduzibel ist.*