Übungen - Blatt 2

→ 30.09.2016 (12h)

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper, $n \geq 1$ und $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ der Ring der Polynome in n Variabeln mit Koeffizienten aus $\mathbf{k}$. Für jede Teilmenge $S \subset \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ definiert man

$$V(S) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{k}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \ \forall f \in S\}.$$

Beweisen Sie dass

$$V(\{f_1, \dots, f_m\}) \cup V(\{g_1, \dots, g_l\}) = V(\{f_i g_j\}_{i=1,j=1}^{m,l}).$$

für alle $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_l \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper, $n \geq 1$ und $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ der Ring der Polynome in n Variabeln mit Koeffizienten aus $\mathbf{k}$. Für jede Teilmenge $M \subset \mathbf{k}^n$ definiert man

$$I(M) = \{f \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] \mid f|_M = 0\} = \{f \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] \mid f(p) = 0 \ \forall p \in M\}$$

Beweisen Sie die folgende Behauptungen:

1. $S \subset I(V(S))$ für jede Teilmenge $S \subset \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$.
2. $M \subset V(I(M))$ für jede Teilmenge $M \subset \mathbf{k}^n$.
3. $V(S) = V(I(V(S)))$ für jede Teilmenge $S \subset \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$.
4. $I(M) = I(V(I(M)))$ für jede Teilmenge $M \subset \mathbf{k}^n$.
5. $I(\mathbf{k}^n) = \{0\} \Leftrightarrow \mathbf{k}$ ist unendlich.

   Tipp: Für $\Leftarrow$ beweisen Sie dass Resultat mit Induktion über n.

Aufgabe 3

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ definiert man $X_i = V(y - ix) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.
Beweisen Sie, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ keine algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4

Sei M ein topologischer Raum und $A \subset M$ eine Teilmenge.

1. Beweisen Sie, dass eine Topologie auf A existiert, so dass die offene Menge der Form $A \cap U$ sind, wo $U \subset M$ offen ist (*induzierte Topologie*).
2. Beweisen Sie, dass die abgeschlossene Teilmenge von A sind alle Teilmenge der Form $A \cap F$, wo $F \subset X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 5

Sei Z ein topologischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für alle Teilmengen $W_1, W_2 \subset Z$ hat man $\overline{W_1 \cup W_2} = \overline{W_1} \cup \overline{W_2}$.
2. Seien $F \subset W \subset Z$ Teilmengen. Die Menge F ist abgeschlossen in W genau wenn $F = \overline{F} \cap W$.
3. Eine Teilmenge $F \subset W$ liegt dicht in W genau wenn $U \cap F \neq \emptyset$ für jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset W$.