Übungen - Blatt 1

→ 24.02.2017 (12h)

Wir arbeiten über ein Körper $\mathbf{k}$, algebraisch abgeschlossen und schreiben

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbf{k}), \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$$

für jedes $n \geq 1$.

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

1. Für jede invertierbare Matrix $M = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{k})$. kriegt man ein Automorphismus $\varphi_M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(\mathbf{k}))$, der Form

$$\varphi_M \colon [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [a_{00}x_0 + \cdots + a_{0n}x_n : \cdots : a_{n0}x_0 + \ldots a_{nn}x_n].$$

   Tipp: Man kann auch diese mit Spalten schreiben:

$$\varphi_M \colon \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2. Seien $M, M' \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{k})$. Die Automorphismen φ_M und $\varphi_{M'}$ sind gleich genau dann wenn $M = \lambda M'$ für $\lambda \in \mathbf{k}^*$.

3. Jeder Automorphismus von $\mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ ist der Form φ_M für ein $M \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{k})$.

   Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 1 vom Blatt 0. Nehmen Sie $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(\mathbf{k}))$ mit Inverse ψ und schreiben Sie diese mit homogenen Polynomen ohne gemeinsam Teiler, dann beweisen Sie, dass $1 = \deg(\varphi\psi) = \deg(\varphi)\deg(\psi)$.

4. Diese gibt ein Isomorphismus $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) \simeq \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbf{k}) = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{k})/\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbf{k}^*\}$.

Aufgabe 2

Sei $\Delta \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine endliche Teilmenge. Beweisen Sie, dass eine Gerade $\ell \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ existiert, die durch kein Punkt von Δ geht.
Tipp: Weil $\mathbf{k}$ unendlich ist, gibt es ein Punkt $p \in \mathbb{P}^2 \setminus \Delta$. Wir beweisen, dass eine Gerade ℓ durch p geht und durch kein Punkt von Δ geht. Wir können ein Element von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{k})) = \mathrm{PGL}_3(\mathbf{k})$ nehmen, und p auf $[0:0:1]$ schicken und dann eine Gerade der Form $x_0 + \lambda x_1 = 0$ nehmen mit $\lambda \in \mathbf{k}$ (Details zu schreiben).

Aufgabe 3

Seien Y, Z zwei irreduzible quasi-projektive / quasi-affine algebraische Varietäten und $\varphi\colon Y \dashrightarrow Z$ eine birationale Abbildung, mit Inverse $\psi\colon Z \dashrightarrow Y$.
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $U = \{y \in \mathrm{dom}(\varphi) \mid \varphi(y) \in \mathrm{dom}(\psi)\}$ ist eine offene dichte Teilmenge von Y.
$V = \{z \in \mathrm{dom}(\psi) \mid \psi(z) \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$ ist eine offene dichte Teilmenge von Z.

Die Einschränkungen von φ und ψ geben Isomorphismen

$\varphi\colon U \xrightarrow{\simeq} V$, $\psi\colon V \xrightarrow{\simeq} U$ mit $\psi\varphi = \mathrm{id}_U$ $\varphi\psi = \mathrm{id}_V$.

Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 3 vom Blatt 7 vom ersten Semester.

(b) Wenn $U' \subset Y$ und $V' \subset Z$ zwei nichtleere offene Menge sind so dass die Einschränkung von φ ein Isomorphismus $U' \to V'$ gibt, hat man $U' \subset U$ und $V' \subset V$.

(c) Wenn $Y = Z = \mathbb{P}^n$, gibt es $P, Q \in \mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ so dass $\mathbb{P}^n \setminus U = V(P)$ und $\mathbb{P}^n \setminus V = V(Q)$.

Tipp: Schreiben Sie ψ und φ mit homogenen Polynomen und benutzen Sie, dass $\deg(\varphi \circ \psi) = 1 \leq \deg(\varphi) \cdot \deg(\psi)$.

(d) Wenn $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{P}^n$ endliche Teilmenge sind, so dass $\mathbb{P}^n \setminus \Delta_1$ und $\mathbb{P}^n \setminus \Delta_2$ isomorph sind, gibt es ein Automorphismus von $\mathbb{P}^n$ der Δ_1 auf Δ_2 schickt.

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) & \mapsto & \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \\ ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) & \mapsto & [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1] \end{array}$$

ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ und

$$\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \mid z_0z_3 = z_1z_2\}$$

gibt.

Aufgabe 5

Welche von den folgenden algebraische Varietäten sind isomorph? Welche sind birational?
(Geben sie die Menge von Isomorphieklassen / Birationalklassen von Varietäten X_i)

$$\begin{array}{ll} X_1 = \mathbb{A}^1 & X_9 = \mathbb{P}^1 \setminus \{[0:1]\} \\ X_2 = \mathbb{A}^2 & X_{10} = \mathbb{P}^1 \setminus \{[0:1],[1:0]\} \\ X_3 = \mathbb{P}^1 & X_{11} = \mathbb{P}^1 \setminus \{[0:1],[1:0],[1:1]\} \\ X_4 = \mathbb{P}^2 & X_{12} = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ X_5 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} & X_{13} = \mathbb{P}^2 \setminus \{[0:0:1]\} \\ X_6 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0,1\} & X_{14} = \mathbb{P}^2 \setminus \{[0:0:1],[0:1:0]\} \\ X_7 = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y = 0\} & X_{15} = \mathbb{P}^2 \setminus \{[0:0:1],[0:1:0],[1:0:0]\} \\ X_8 = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\} & X_{16} = \mathbb{P}^2 \setminus \{[0:0:1],[0:1:0],[0:1:1]\}. \end{array}$$