Übungen - Blatt 11

→ 02.12.2016 (12h)

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper, $n \geq 1$, $i \in \{0,\dots,n\}$ und $f \in \mathbf{k}[X_0,\dots,X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geq 1$, so dass f kein Multipel von X_i ist. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. f ist irreduzibel.
2. $f(X_1,\dots,X_i,1,X_{i+1},\dots,X_n) \in \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ ist irreduzibel.

Tipp: Benutzen Sie Lemma 5.3.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossene Körper und $f \in \mathbf{k}[X_0,\dots,X_n]$ ein homogenes Polynom, so dass $f(X_1,\dots,X_i,1,X_{i+1},\dots,X_n) \in \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ irreduzibel ist und so dass f kein Multipel von X_i ist.
Beweisen Sie, dass $Y = V(f) \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ irreduzibel ist.
Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 1 und den Nullstellensatz.

Aufgabe 3

Ist $Y \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ irreduzibel? Beschreiben Sie $Y \cap U_i$ für $i = 0,1,2$. Ist es glatt?

(a) $Y = V(X_0X_1 - (X_2)^2)$.

(b) $Y = V((X_1)^2X_2 - (X_0)^3)$.

(c) $Y = V((X_1)^2X_2 - X_0(X_0 - X_2)^2)$.