Übungen - Blatt 10

→ 25.11.2016 (12h)

Aufgabe 1

(*a*) Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossene Körper und $P \in \mathbf{k}[X_1,X_2] \setminus \{0\}$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geq 1$.

Beweisen Sie, dass $P = \prod_{i=1}^{n}(a_iX_1 - b_iX_2)$ wo $(a_i,b_i) \in \mathbf{k}^2 \setminus \{0\}$ ist, für $i = 1,\dots,n$, und dass

$$V(P) = \{[b_i : a_i] \mid i = 1,\dots,n\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbf{k}).$$

(*b*) Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $P \in \mathbf{k}[X_1,X_2] \setminus \{0\}$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geq 1$. Beweisen Sie, dass $V(P) \subset \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ höchstens d Punkte enthält.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $F,G \in \mathbf{k}[x_1,\dots,x_n] \setminus \{0\}$ homogene Polynomone vom Grad d_1 und d_2. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(*a*) Das Polynom FG ist homogen vom Grad $d_1 + d_2$;

(*b*) Jeder Teiler von F is homogen.

Ist $F + G$ homogen?

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper. Finden Sie den Abschluss von $\psi_0(X)$ in $\mathbb{P}^3(\mathbf{k})$, wobei

$$\begin{array}{rccc} & \mathbb{A}^3(\mathbf{k}) & \to & \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \\ \psi_0 \colon & (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & [1 : x_1 : x_2 : x_3] \end{array}$$

(*a*) $X = \{(t,t^2,t^3) \mid t \in \mathbf{k}\}$.

(*b*) $X = V(X_1,(X_2)^2 + (X_3)^2 - 1) \subset \mathbb{A}^3$.

(*c*) $X = V(X_1) \subset \mathbb{A}^3$.

Aufgabe 4

Eine *Gerade* in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ ist eine abgeschlossene Menge $L = V(f) \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, wo $f \in \mathbf{k}[X_0,X_1,X_2] \setminus \{0\}$ homogen vom Grad 1 ist.

(*a*) Finden Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ und der Menge von Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$.

(*b*) Beweisen Sie, dass durch zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ genau eine Gerade geht.

(*c*) Beweisen Sie, dass zwei verschiedene Geraden von $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ in genau ein Punkt gehen.

Aufgabe 5

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Die irreduzible algebraische Teilmengen von $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ sind $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ und die Punkte.

(b) Die irreduzible algebraische Teilmengen von $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ sind $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, die Punkte und die unendliche Teilmenge $V(f)$ wo $f \in \mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]$ homogen und irreduzibel ist.

Tipp: Wenn $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ irreduzibel und abgeschlossen ist, ist auch $X \cap U_i$ abgeschlossen in U_i, und offen in $X \cap U_i$, also auch irreduzibel, wenn nicht leer.