Übungen - Blatt 1

→ 23.09.2016, 19:00 (Spiegelgasse 1, Fach "Gruppe Blanc")

Aufgabe 1

1. Sei R ein Ring, S eine R-Algebra und $s_1,\dots,s_n \in S$.

   Beweisen Sie, dass $Rs_1+\cdots+Rs_n \subset R[s_1,\dots,s_n]$, und dass $R[s_1,\dots,s_n]$ der kleinsten Unterring von S ist, der $s_1,\dots,s_n$ enthält.

2. Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}[X,Y]/(X-Y^2)$ faktoriell ist (weil es isomorph zu $\mathbb{R}[Y]$ ist), aber dass $\mathbb{R}[X,Y]/(X^3-Y^2)$ nicht faktoriell ist (Bemerken Sie, dass die Klassen x und y von X und Y irreduzibel sind, und dass $x^3=y^2$).

3. Beschreiben Sie (mit ein Bild) die Mengen

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y^2\} \text{ und } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^3=y^2\}.$$

Definition

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $n\in\mathbb{N}$. Der *n-dimensionale affine Raum* $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ ist die Menge

$$\mathbb{A}^n(\mathbf{k}) = \left\{(a_1,\dots,a_n) \;\middle|\; a_i\in\mathbf{k} \text{ für } i=1,\dots,n\right\}.$$

Für $n=1$ und $n=2$ geben wir spezielle Namen: $\mathbb{A}^1(\mathbf{k})$ ist die affine Gerade und $\mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ die affine Ebene. Eine Untermenge $Z\subset\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ heisst *algebraische affine Menge* (oder nur algebraische Teilmenge) wenn Polynome $f_1,\dots,f_s\in\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]$ existieren, so dass

$$Z = \left\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \;\middle|\; f_i(a_1,\dots,a_n)=0 \text{ für } i=1,\dots,s\right\}$$

gilt.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen algebraisch sind:

1. $\{(t,t^2,t^3)\in\mathbb{A}^3(\mathbf{k}) \mid t\in\mathbf{k}\}$;
2. $\{(\cos(t),\sin(t))\in\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^1(\mathbf{k})$ entweder leer, ganz $\mathbb{A}^1(\mathbf{k})$ oder eine endliche Teilmenge ist.