Übungen - Blatt 0

keine Abgabe

Wir arbeiten über ein Körper $\mathbf{k}$, algebraisch abgeschlossen und schreiben $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ für jedes $n \geq 1$.

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Jede rationale Abbildung $f \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ kann man schreiben als

$$[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [f_0(x_0,\dots,x_n) : \cdots : f_n(x_0,\dots,x_n)]$$

wo $f_0,\dots,f_n \in \mathbf{k}[x_0,\dots,x_n]$ homogen vom gleichen Grad d sind und kein gemeinsam Teiler haben.

(b) Die obere Beschreibung ist eindeutig, bis auf Skalarmultiplikation. Insbesondere ist der Grad d nur abhängig von f. Man definiert dann $\deg(f) = d$. Wir haben dann $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{P}^n \setminus V(f_0,\dots,f_n)$.

(c) Wenn $f \colon \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ eine rationale Abbildung ist, ist f auch ein Morphismus.

(d) Wenn $f,g \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ dominante rationale Abbildungen sind, hat man

$$\deg(f \circ g) \leq \deg(f) \cdot \deg(g).$$

(e) Wenn $f,g \colon \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ zwei rationale Abbildungen sind, hat man

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g).$$

Aufgabe 2

Für eine Varietät X schreibt man $\mathrm{Bir}(X) = \{f \colon X \dashrightarrow X \mid f \text{ birationale Abbildung}\}$ und $\mathrm{Aut}(X) = \{f \colon X \xrightarrow{\simeq} X \mid f \text{ Isomorphismus (Automorphismus)}\}$. Beweisen Sie, die folgende Gleichungen:

(a) $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \{[x:y] \mapsto [ax+by : cx+dy] \mid a,b,c,d \in \mathbf{k}, ad-bc \neq 0\}$;

Tipp: Benutzen Sie Aufgabe $1(e)$.

(b) $\mathrm{Bir}(\mathbb{A}^1) = \{x \dashrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} \mid a,b,c,d \in \mathbf{k}, ad-bc \neq 0\}$.

Tipp: Benutzen Sie (a).

(c) $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1) = \{x \mapsto ax+b \mid a,b \in \mathbf{k}, a \neq 0\}$;

Tipp: Benutzen Sie (b).

Aufgabe 3

Welche von den folgenden algebraische Varietäten sind isomorph? Welche sind birational? (Geben sie die Menge von Isomorphieklassen / Birationalklassen von Varietäten X_i)

1. $X_1 = \mathbb{A}^1$;
2. $X_2 = \mathbb{A}^2$;
3. $X_3 = \mathbb{P}^1$;
4. $X_4 = \mathbb{P}^2$;
5. $X_5 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$;
6. $X_6 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1\}$;
7. $X_7 = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;