Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 8

→ 9.11.2015, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein Integritätsring und $x, y \in A$ zwei Elemente, die assoziiert sind. Beweisen Sie, dass

$$x \text{ ist irreduzibel} \Leftrightarrow y \text{ ist irreduzibel.}$$

Aufgabe 2

Sei A ein Integritätsring und $x \in A$. Beweisen Sie, dass

$$x \text{ ist irreduzibel} \Leftrightarrow \text{Es gibt kein Hauptideal } \mathfrak{a} \neq A \text{ mit } (x) \subsetneq \mathfrak{a}.$$

Finden Sie ein Beispiel, wo x irreduzibel ist aber (x) kein Maximalideal ist.

Aufgabe 3

Sei $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right] = \mathbb{Z}[\theta]$, wo $\theta = \frac{1+\sqrt{-19}}{2}$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $\theta + \overline{\theta} = 1$ und $\theta \cdot \overline{\theta} = 5$.
2. Die Norm
$$\begin{array}{rccl} N\colon & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & x & \mapsto & |x|^2 = x \cdot \overline{x} \end{array}$$
gibt eine multiplikative Abbildung $A \to \mathbb{N}$, so dass $N(a + b\theta) = a^2 + ab + 5b^2$.
3. Für $x \in A$ hat man $x \in A^* \Leftrightarrow N(x) = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
4. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ hat man
$$\begin{array}{rcccc} 2|N(a+b\theta) & \Leftrightarrow & 2|a & \text{und} & 2|b, \\ 3|N(a+b\theta) & \Leftrightarrow & 3|a & \text{und} & 3|b. \end{array}$$
Tipp: Finden Sie die Lösungen von $a^2 + ab + 5b^2 = 0$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
5. Die Elemente 2 und 3 sind prim in A (und damit auch irreduzibel).

Aufgabe 4

Wir möchten beweisen, dass $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ kein euklidischer Ring ist und benutzen Aufgabe 3. Wir nehmen an, dass es eine euklidische Funktion δ gibt und nehmen $m \in A \setminus \{0, \pm 1\}$, so dass $\delta(m)$ minimal ist.

1. Wir schreiben $2 = mq + r$ mit $\delta(r) < \delta(m)$ oder $r = 0$. Beweisen Sie, dass $m \in \{\pm 2, \pm 3\}$.

   Tipp: Wegen der Minimalität hat man $r \in \{0, 1, -1\}$. Studieren Sie alle Fälle und benutzen Sie, dass $2, 3$ irreduzibel sind (Aufgabe 3).

2. Wir schreiben $\theta = mq + r$ mit $\delta(r) < \delta(m)$ oder $r = 0$.

   Beweisen Sie, dass m teilt θ, $\theta + 1$ oder $\theta - 1$.

3. Beweisen Sie, dass $\theta, \theta + 1, \theta - 1$ keine Multipel von 2 oder 3 sind.

   Tipp: Was ist die Norm von $\theta, \theta + 1, \theta - 1$?

Damit haben Sie bewiesen, dass $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ kein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 5

Wir definieren $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \in \mathbb{C}$ und $A = \mathbb{Z}[\omega]$.
Beweisen Sie, dass A ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper. Gibt es eine euklidische Funktion auf $K[X,Y]$?