Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität
Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 7

→ 2.11.2015, 12:00

Aufgabe 1

Berechnen Sie $\mathrm{Nil}(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z})$. Ist dieses Ideal prim? Ist der Durchschnitt von Primidealen ein Primideal?

Aufgabe 2

Sei $\varphi: A \to B$ ein Ringhomomorphismus, $\mathfrak{b} \subset B$ ein Ideal und $\mathfrak{a} = \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \subset A$.
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Es gibt einen eindeutigen injektiven Ringhomorphismus $\overline{\varphi}: A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{b}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{a}}"] & B \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{b}}"] & B/\mathfrak{b} \\ A/\mathfrak{a} \arrow[urr, "\overline{\varphi}"'] & & \end{tikzcd}$$

   wo $\pi_{\mathfrak{a}}, \pi_{\mathfrak{b}}$ die kanonischen Abbildungen sind.

2. Wenn $\mathfrak{b}$ ein Primideal von B ist, ist auch $\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Primideal von A.

3. Wenn $\mathfrak{b}$ ein Maximalideal von B ist und φ surjektiv ist, ist auch $\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Maximalideal von A.

Ist 3. richtig, wenn φ nicht surjektiv ist?

Aufgabe 3

Sei A ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Die kanonische Abbildung $\pi: A \to A/\mathfrak{a}$ induziert bijektive Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Ideale von } A, \\ \text{die } \mathfrak{a} \text{ enthalten} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Ideale} \\ \text{von } A/\mathfrak{a} \end{array} \right\} \\ \mathfrak{b} & \mapsto & \pi(\mathfrak{b}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{c}) & \leftarrow & \mathfrak{c} \end{array}$$

(Folgerung 1.15).
Beweisen Sie, dass diese bijektiven Abbildung auch bijektive Abbildungen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Primideale von } A, \\ \text{die } \mathfrak{a} \text{ enthalten} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Primideale} \\ \text{von } A/\mathfrak{a} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximalideale von } A, \\ \text{die } \mathfrak{a} \text{ enthalten} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Maximalideale} \\ \text{von } A/\mathfrak{a} \end{array} \right\}$$

induziert.
Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4

Sei A ein kommutativer Ring, $S \subset A$ eine nichtleere multiplikative Teilmenge. Beweisen Sie, dass $S^{-1}A$ ein Ring ist, mit den folgenden Verknüpfungen:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'},$$
$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}.$$

Aufgabe 5

Beschreiben Sie $S^{-1}A$ in den folgenden Fällen:
Wie viele Elemente gibt es in $S^{-1}A$? Was ist $(S^{-1}A)^*$? Was sind die Primideale / Maximalideale von $S^{-1}A$?

1. $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $S = \{[2],[4],[8]\}$.
   ($[n]$ ist hier die Klasse $n + 12\mathbb{Z}$ von $n \in \mathbb{Z}$, also $[2] = [14]$ und $[3] = [-9]$).
2. $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $S = \{[4]\}$.
3. $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \setminus (3) = \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ teilt nicht } n\}$.

Aufgabe 6

Sei $A = \mathbb{C}[X]$ (Polynome in einer Variabeln mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$), $\mathfrak{p} = (X) \subset A$ und $S = A \setminus \mathfrak{p}$.
Wie können Sie die Elemente von $S^{-1}A$ beschreiben ?
Was ist $(S^{-1}A)^*$?
Was sind die Maximalideale von $S^{-1}A$?