Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität
Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 5

→ 19.10.2015, 12:00

Aufgabe 1

Sei A eine unendliche Menge. Beweisen Sie die Existenz einer Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to E$, wo $E \subset A$ eine Teilmenge ist.
Tipp: Benutzen Sie das Auswahlaxiom und eine Auswahlfunktion $W: T(A) \to A$, wo $T(A)$ die Menge der nicht leereen Teilmengen von A ist. Definieren Sie dann $f(n) = W(..)$ mit Induktion.

Aufgabe 2

Finden Sie eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass

$$(X,Y) = \{XP + YQ \mid P,Q \in K[X,Y]\}$$

kein Hauptideal von $K[X,Y]$ ist.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper. Sind die folgenden Ideale von $K[X,Y]$ Primideale? Maximalideale?

$$(X,Y), (X,Y+1), (X), (X^2 - Y^2).$$

Aufgabe 5

Im Ring $A = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})[X]$ berechnen Sie

$$(3X+1)^2, (3X+1)^3, (3X+1)^4, (3X+1)^5, \dots,$$

Aufgabe 6

Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Menge von Mengen. Wir definieren *das kartesische Produkt von den* M_i

$$\prod_{i\in I} M_i$$

als die Menge von Funktionen $I \to \bigcup_{i\in I} M_i$, wo $F(i) \in M_i$, für jedes $i \in I$.

1. Beschreiben Sie $\prod_{i\in I} M_i$, wenn $I = \{1,\dots,n\}$, und zeigen Sie dass es mit der Menge

   $$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n,$$

   übereinstimmt, die Sie schon gesehen haben.

2. Beweisen Sie, dass das Auswahlaxiom äquivalent zu der folgenden Behauptung ist: Das Kartesiche Produkt von nichtleeren Mengen ist nicht leer.