Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität
Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 4

→ 12.10.2015, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein kommutativer Ring, so dass $A \neq \{0\}$. Beweisen, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind :

1. A ist ein Körper;
2. Jeder Ringhomomorphismus von A auf einen Nichtnullring B ist injektiv.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass $\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ ist.
(*Errinerung:* $(X^2+1) = \{P \cdot (X^2+1) \mid P \in \mathbb{R}[X]\} \subset \mathbb{R}[X]$.)

Aufgabe 3

1. Sei A ein Integritätsring. Beweisen Sie, dass $(A[X])^* = A^*$.
2. Berechnen Sie $(A[X])^*$, für $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass das Ideal $(2,X) \subset \mathbb{Z}[X]$ kein Hauptideal ist.
(*Errinerung:* $(2,X)$ *ist das Ideal erzeugt von* 2 *und* X*:* $(2,X) = \{2 \cdot P + X \cdot Q \mid P, Q \in \mathbb{Z}[X]\}$)
Tipp: Wenn $(2,X) = (P)$*, gibt es* $Q \in \mathbb{Z}[X]$ *mit* $2 = PQ$*. Was ist der Grad von P ? Ist es möglich, dass* $X \in (P)$ *?*

Aufgabe 5

Sei A ein kommutativer Ring und $K \subset A$ ein Unterring. Beweisen Sie, dass A ein Vektorraum über K ist, wenn K ein Körper ist.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper und $P \in K[X]$.

1. Beweisen Sie, dass der Ringhomomorphismus $K \to K[X]/(P)$, $a \mapsto a + (P)$ injektiv ist, genau dann wenn $\deg(P) \neq 0$.
2. Beweisen Sie, dass $K[X]/(P)$ ein K-Vektorraum ist, wenn $\deg(P) \neq 0$.
3. Finden Sie eine Basis von den folgenden Vektorräumen:
   (a) $A = K[X]$.
   (b) $A = K[X]/(X^n)$, $n \geq 1$.
   (c) $A = K[X]/(P)$, mit $P \in K[X] \setminus \{0\}$, $\deg(P) = n \geq 1$.