Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 3

→ 05.10.2015 – (12:00)

Aufgabe 1

Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Beweisen Sie, dass die Ideale von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gegeben sind durch:

$$(m\mathbb{Z})/n\mathbb{Z} = \{am + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\},$$

wo $m \geq 1$ eine ganze Zahl, so dass m teilt n, und wo $(n\mathbb{Z})/n\mathbb{Z}$ das Nullideal von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist.
Was sind die Ideale von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?
Tipp: Benutzen Sie den Satz 1.12 *der Vorlesung.*

Aufgabe 2

Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl.

1. Beweisen Sie, dass

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \{1, \dots, n-1\}, \mathrm{ggT}(a,n) = 1\}.$$

2. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ein Körper ist, genau dann wenn n eine Primzahl ist. (In diesem Fall schreibt man $\mathbb{F}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

3. Beschreiben Sie $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$ und $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$.

Aufgabe 3

1. Finden Sie alle Ringhomomorphismen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Finden Sie alle Ringhomomorphismen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ zwei Idealen. Wir definieren:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a} + \mathfrak{b} & = & \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}; \\ \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} & = & \{\sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{a}, b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{b}, n \in \mathbb{N}\}. \\ \sqrt{\mathfrak{a}} & = & \{a \in A \mid \exists n \geq 1 \text{ mit } a^n \in \mathfrak{a}\} \text{ (heisst \textit{Wurzel} oder \textit{Radikal} von } \mathfrak{a}). \end{array}$$

Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, Ideale von A sind.
Beweisen Sie, dass $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Ideal von A ist, wenn A kommutativ ist.

Aufgabe 5

Sei A ein Ring. Wir definieren eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{Z} \to A$ wie folgt:

$$\begin{array}{rcll}
\varphi(1) & = & 1 & \\
\varphi(-1) & = & -1 & \\
\varphi(n) & = & \underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ Elementen}} & \text{für jedes } n \geq 2 \\
\varphi(-n) & = & \underbrace{(-1)+\cdots+(-1)}_{n \text{ Elementen}} & \text{für jedes } n \geq 2
\end{array}$$

1. Beweisen Sie, dass φ ein Ringhomomorphismus ist, und dass φ der einzige Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \to A$ ist.

2. Der Kern von φ ist ein Ideal von $\mathbb{Z}$, von der Form $m\mathbb{Z}$, $m \geq 0$ (Blatt 2). Man definiert $m = \operatorname{char}(A)$ als die *Charakteristik von A*.

   Beweisen Sie: A ist ein Integritätsring $\Rightarrow$ $\operatorname{char}(A) = 0$ oder $\operatorname{char}(A)$ ist eine Primzahl.

   Tipp: Beweisen, dass $\operatorname{char}(A) = m \cdot n$, $m, n \geq 2$, $\Rightarrow$ *A kein Integritätsring ist.*

Aufgabe 6

Seien $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon A \to C$ zwei Ringhomomorphismen, wo φ surjektiv ist. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. Es gibt einen Ringhomomorphismus $\eta : B \to C$, so dass $\psi = \eta\varphi$.

2. $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset \operatorname{Ker}(\psi)$.

Was passiert wenn φ nicht surjektiv ist?