Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 2

→ 28.09.2015

Aufgabe 1

Sei A ein Ring. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$ für alle $a, b \in A$.
2. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, für alle $a, b, c \in A$.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring, $A \neq \{0\}$. Wir definieren

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{NT}(A) & = & \{a \in A \mid \exists b \in A \setminus \{0\}, ab = 0 \text{ oder } ba = 0\} = \textit{"Menge der Nullteiler in A"} \\ \mathrm{Nil}(A) & = & \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n = 0\} = \textit{"Menge der nilpotenten Elemente in A"} \end{array}$$

1. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Nil}(A) \subset \mathrm{NT}(A)$.
2. Ist $\mathrm{Nil}(A)$ ein Ideal von A? Ist $\mathrm{NT}(A)$ ein Ideal von A?
3. Was passiert wenn A kommutativ ist?

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Unterring von $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist.
Ist A kommutativ? Ist A ein Körper? Ist A isomorph zu einem Ring, der Sie schon kennen?

Aufgabe 4

1. Beweisen Sie, dass die Ideale $\mathbb{Z}$ gegeben sind durch:

$$n\mathbb{Z} = \{an \mid a \in \mathbb{Z}\}, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Was sind die Ideale von $\mathbb{R}$?

Aufgabe 5

Sei A ein kommutativer Ring. Beweisen Sie, dass

$$A^* = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \subsetneq A \\ \text{Ideal}}} A \setminus \mathfrak{a}.$$

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Unterring von $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist. Beschreiben Sie A^*, $\mathrm{NT}(A)$ und $\mathrm{Nil}(A)$. (cf Aufgabe 2 für die Definition von NT und Nil).