Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 12

$\to$ 7.12.2015, 12:00

Aufgabe 1

Sind die folgenden Elemente ganz über $\mathbb{Z}$?
$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 2

Sei B ein kommutativer Ring, $A \subset B$ ein Unterring und $f_1, \dots, f_n \in B$ sind Elemente, so dass $B = \{a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \mid a_i \in A\}$. Beweisen Sie, dass jedes $x \in B$ ganz über A ist.
Tipp: Für $i = 1, \dots, n$ hat man $xf_i \in B$, also kann man $a_{i1}, \dots, a_{in} \in A$ finden, so dass $xf_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$. Folgen Sie dann dem Beweis von Satz 9.7.

Aufgabe 3

Sei B ein kommutativer Ring, $A \subset B$ ein Unterring und $\xi_1, \xi_2 \in B$ zwei Elemente, die ganz über A sind.

1. Beweisen Sie, dass $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \cdot \xi_2$ ganz über A sind.

   Tipp: Finden Sie $f_1, \dots, f_n \in B$, so dass $A[\xi_1, \xi_2] = \{a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \mid a_i \in A\}$ und benutzen Sie Aufgabe 2.

2. Beweisen Sie, dass $\{\xi \in B \mid \xi \text{ ist ganz über } A\}$ ein Unterring von B ist, der A enthält.

Aufgabe 4

Finden Sie eine Basis von den folgenden $\mathbb{Q}$-Vektorräumen:
$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[e^{2i\pi/3}]$, $\mathbb{Q}[i, \sqrt{3}, e^{2i\pi/3}]$.

Aufgabe 5

Finden Sie einen Körper von Ordnung 125.