Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 10

→ 23.11.2015, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein faktorieller Ring und $p,q \in A$ zwei irreduzible Elemente. Beweisen Sie, dass die folgende Behauptungen äquivalent sind:

1. Das Ideal $(p,q) = (p) + (q)$ ist ein Hauptideal.
2. Die Elemente p und q sind assoziiert (d.h. $(p) = (q)$) oder $(p) + (q) = A$.

Tipp: Wenn (p,q) ein Hauptideal ist, gibt es $a \in A$ mit $(a) = (p,q)$. Es folgt, dass $a|p$ und $a|q$. Was sind die Möglichkeiten für a?

Aufgabe 2

1. Sei A ein faktorieller Ring. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) Jedes Polynom $P \in A[X]$ vom Grad 1 ist irreduzibel.
   (b) A ist ein Körper.
   (c) $A[X]$ ist ein Hauptidealring.

   Tipp: Wenn A kein Körper ist, gibt es $a \in A$ irreduzibel. Beweisen Sie, dass das Ideal $(a,X) \subset A[X]$ kein Hauptideal ist (mit Aufgabe 1) und dass aX nicht irreduzibel ist.

2. Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) Jedes irreduzible Polynom $P \in A[X]$ ist vom Grad 1.
   (b) Jedes Polynom $P \in K[X]$ vom Grad ≥ 1 hat eine Nullstelle in K (d.h. es gibt $x \in K$ mit $P(x) = 0$).

   Man sagt in diesem Fall, dass K algebraisch abgeschlossen *ist.*

Aufgabe 3

Wir schreiben $\xi = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Beweisen Sie dass $\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi + c\xi^2 \mid a,b,c \in \mathbb{Z}\}$ und dass $\mathbb{Z}[\xi]$ isomorph zu $\mathbb{Z}[X]/(X^3 - 2)$ ist.

Aufgabe 4

Sei A ein Integritätsring.
Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. A ist ein lokaler Hauptidealring, der kein Körper ist.
2. A ist ein Hauptidealring, der ein einziges nicht-null Primideal enthält.
3. A ist ein faktorieller Ring mit einem einzigen irreduziblen Element, bis auf Einheiten.

Tipp: $2 \Rightarrow 1$*: Beweisen Sie, dass das einzige nicht-null Primideal das einzige Maximalideal ist.* $1 \Rightarrow 3$*: Wenn Sie das Maximalideal als* (a) *schreiben, können Sie beweisen, dass* a *das einzige irreduzible Element ist, bis auf Einheiten.* $3 \Rightarrow 2$*: Sei* a *das einzige irreduzible Element. Beweisen Sie, dass alle nicht-null Ideale der Form* (a^m)*,* $m \geq 0$*, sind.*

Wenn eine (oder alle) von diesen Behauptung erfüllt ist, sagt man dass A ein *diskreter Bewertungsring* ist.

Aufgabe 5

Sei A ein diskreter Bewertungsring (vgl. Aufgabe 4) und $u \in A$ ein irreduzibles Element.

1. Beweisen Sie, dass jedes $x \in A \setminus \{0\}$ gleich $x = au^m$ ist, wo $a \in A^*$ und $m \geq 0$.

   Tipp: Benutzen Sie die dritte Bedingung.

2. Beweisen Sie, dass A ein euklidischer Ring ist mit der folgenden euklidischen Funktion: $\delta(au^m) = m$, wenn $m \geq 0$ und $a \in A^*$.