Übungen - Blatt 1

→ 21.09.2015

Aufgabe 1

1. Zu beweisen: In jeder Gruppe G, mit Verknüpfung $\star$, gibt es genau ein neutrales Element (ein Element $e \in G$ so dass $e \star a = a \star e = a$, für jedes $a \in G$).

2. Zu beweisen: In jeder Gruppe G hat jedes Element $g \in G$ genau ein Inverses (ein Element $h \in G$, so dass $g \star h = h \star g = e$).

Aufgabe 2

1. Welche von diesen Mengen mit Verknüpfungen sind Gruppen?

$$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{R},\cdot),(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot),(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot).$$

2. Sei $M = \{F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F \text{ ist stetig}\}$. Wir definieren drei Verknüpfungen auf M: für alle $f,g \in M$ definiert man $f+g, f\cdot g, f\circ g \in M$ wie folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x)+g(x), (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x), (f\circ g)(x) = f(g(x)).$$

Welche von diesen Verknüpfungen geben M eine Gruppenstruktur?

Aufgabe 3

Sei A ein Ring. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $0\cdot a = a\cdot 0 = 0$, für jedes $a \in A$.

2. Wenn A zwei Einselemente enthählt, sind diese Elemente gleich.

3. Sei A ein Ring mit Einselement $1 \in A$. Wir haben $0 = 1$ genau dann wenn $A = \{0\}$.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring, $A \neq \{0\}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. Der Ring A ist nullteilerfrei.

2. Die Menge $A\setminus\{0\}$ ist multiplikativ abgeschlossen: für alle $a,b \in A\setminus\{0\}$ hat man $ab \in A\setminus\{0\}$.

3. Für alle $a,b \in A$, $x \in A\setminus\{0\}$ hat man $ax = bx \Rightarrow a = b$ und $xa = xb \Rightarrow a = b$.

Aufgabe 5

Sei A ein Ring (mit Einselement $1 \in A$). Wir definieren

$$A^* = \{a \in A \mid \exists b \in A, ab = ba = 1\} = \text{"}\textit{Menge der Einheiten}\text{"}$$

Beweisen Sie, dass $(A^*, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 6

Sei $A = \{0, 1, 2\}$.

1. Beweisen Sie, dass A eine einzige Ringstruktur hat, mit 0 als Nullelement und 1 als Einselement.

2. Ist A ein kommutativer Ring?

3. Ist A ein Körper?

Tipp: Beweisen Sie, dass $1 + 1 = 2$, $2 = -1$ *und füllen Sie die folgende Tabelle aus:*

+	0	1	2
0	?	?	?
1	?	?	?
2	?	?	?

,

·	0	1	2
0	?	?	?
1	?	?	?
2	?	?	?

.